

Le rôle de la Programmation multi-objectif lexicographique dans le processus décisionnel : étude de cas à ABRAS

The role of lexicographic goals programming in the decision-making process : case study at ABRAS

دور البرمجة متعددة الأهداف الليكسيكوغرافية في عملية اتخاذ القرار: دراسة حالة مؤسسة ABRAS

Dr. YESLI Tynhinane¹

University of Algiers 3- Algéria

yesli.tynhinane@univ-alger3.dz

Received: 09/06/2022

Accepted: 03/09/2022

Published: 11/11/2022

Résumé :

L'objet de cette article vise à démontrer le rôle et l'apport de la programmation multi-objectif dans le processus décisionnel. Ainsi nous avons effectué une étude de cas au sein de l'Entreprise algérienne ABRAS de PRODUITS ABRASIFS où nous avons appliqués la méthode de la programmation linéaire multi-objectif sur les données de l'année 2020. Cette méthode est considérée comme l'une des techniques qui occupe une place importante au sein de l'approche quantitative et ce, compte tenu du grand succès qu'elle a réalisé en matière de nombre de problèmes traités, surtout en l'analyse et la résolution des problèmes de décision multiples, simultanés et conflictuelles. Les premiers résultats attestent que l'Entreprise ne pourra pas réaliser à la fois tous les objectifs initialement établis, mais elle a la possibilité de réaliser les objectifs les plus prioritaires, ou bien de revoir sa politique de priorité si nécessaire.

Mots clés : Programmation linéaire lexicographique, Prise de décision, Optimisation.

Abstract :

The purpose of this article is to demonstrate the role and contribution of multi-objective programming in decision-making process. Thus we carried out a case study within the Algerian company ABRAS of ABRASIFS PRODUCTS where we applied the method of multi-objective linear programming on data for the year 2020. This method is considered to be one of the techniques that occupies an important place within the quantitative approach, given the great success it has achieved in terms of the number of problems dealt with, especially in the analysis and solving multiple, simultaneous and conflicting decision problems. The first results show that the Company will not be able to achieve at the same time, all the objectives initially established, but it has the possibility of achieving the highest priority objectives. As it has the possibility to revise its priority policy if necessary.

Key words: Lexicographic linear programming, Decision making, Optimization.

¹ - Corresponding author: Dr. YESLI Tynhinane, e-mail: yesli.tynhinane@univ-alger3.dz

ملخص:

تهدف هذه الورقة البحثية إلى توضيح دور ومساهمة البرمجة متعددة الأهداف في عملية اتخاذ القرار. وذلك من خلال إجراء دراسة حالة لمؤسسة إنتاجية جزائرية ABRAS المسؤولة عن إنتاج المواد الكاشطة على المستوى الوطني. أين طبقنا طريقة البرمجة الخطية متعددة الأهداف على معطيات سنة 2020. تعتبر هذه الطريقة من بين أهم التقنيات المستخدمة من حيث المكانة التي تحتلها في المنهج الكمي. نظرا للنتائج التي حققتها، لا سيما في تحليل وحل المشاكل اتخاذ القرارات المتعددة، المتزامنة والمتضاربة. أظهرت نتائج هذه الدراسة أن المؤسسة لا يمكنها تحقيق جميع الأهداف المسطرة في نفس الوقت، لكن لديها إمكانية تحقيق الأهداف ذات الأولوية القصوى، أو إعادة النظر في سياسة الأولويات إذ لزم الأمر.

الكلمات المفتاحية: برمجة خطية الليكسيكوغرافية، اتخاذ القرار، الأمثلية.

Introduction :

Au sein des entreprises, la prise de décision constitue l'une des activités principales des décideurs, ces dernières doivent souvent faire face à des situations de choix, de classement et de tri. Ceci passe indéniablement par la détermination d'objectifs et de prise de décisions œuvrant à leurs réalisations. De nos jours, et face à l'environnement de concurrence accru et des changements de plus en plus complexes, la prise de décision pertinente se révèle une tâche délicate et difficile à prendre.

C'est pour cela que vient la programmation multicritère (multi-objectifs), connue aussi sous le nom de programmation lexicographique, comme outils d'aide à la prise de décision qui cherche un compromis satisfaisant à la réalisation des différents objectifs émis par l'entreprise

Le problème multicritère est considéré comme l'un des problèmes économiques à dimensions multiples largement traité dans le domaine de recherche opérationnelle. Il consiste tout d'abord à sélectionner les principaux objectifs que l'entreprise souhaite réaliser, puis les ordonnées selon les priorités identifiées, en tenant compte des contraintes soumises et l'environnement de concurrence parfaite.

En effet, la détermination de ses objectifs et de leur ordre de priorité de réalisation est considérée comme l'étape la plus propice et déterminante pour l'avenir de l'Entreprise. En dépit de tous les efforts fournis par cette dernière peuvent s'effondrer à cause d'une erreur d'aiguillage sur la priorité donnée aux objectifs et peut coûter la pérennité de l'Entreprise elle-même. Alors la question qui se pose est :

Comment la méthode de programmation multi-objectif lexicographique aide-t-elle à la prise de décision au sein d'une entreprise productive ?

Afin de pouvoir répondre à la problématique précédente, nous posons les hypothèses suivantes :

- La méthode de programmation linéaire multicritères est considérée comme l'un des moyens les plus efficaces pour l'aide à la prise de décisions conflictuelles.

- Construire un modèle de programmation linéaire multicritères, nécessite des données précises et une étude approfondie de l'activité productive de l'entreprise.

L'importance et objectifs de l'étude :

L'importance de cette étude est de mettre en évidence le rôle de l'utilisation de méthodes quantitatives pour la programmation linéaire multicritère en l'aidant à prendre les décisions appropriées dans le but d'atteindre les objectifs de l'organisation avec une grande efficacité.

Cette étude a pour objectifs de :

- Démontrer le rôle principal de la programmation linéaire multicritères dans le processus décisionnel.
- Modéliser via la programmation linéaire multicritères au sein de l'entreprise productive ABRAS.
- Réussir à réaliser les objectifs émis par l'entreprise.

Les limites de l'étude :

Concernant le champ d'application de l'étude, elle a été menée au sein de l'entreprise productive nationale de produits abrasifs à Saida "ABRAS", et sur les données annuelles de l'année 2020.

Approche de l'étude :

Pour répondre à la problématique posée, pouvoir confirmer ou infirmer les hypothèses posées, nous avons adopté la démarche suivante :

- Présentation de la programmation multicritères « multi-objectifs » ;
- Présentation de l'entreprise faisant l'objet de l'étude ;
- Modélisation et interprétation des résultats ;
et cela, on s'appuyant sur la méthode descriptive et analytique.

I. Présentation de l'outil appliqué : la programmation lexicographique

1. Introduction à la recherche opérationnelle :

Si la recherche opérationnelle, est aujourd'hui présente dans la plupart des domaines civils, ses racines sont habituellement attribuées aux services militaires. La seconde guerre mondiale, de par son envergure, créa un besoin urgent d'allouer de manière efficace les ressources limitées aux différentes opérations militaires et aux activités au sein de chaque opération¹.

La recherche opérationnelle est la discipline des méthodes scientifiques utilisables pour faciliter la prise de décisions face à des problématiques. C'est une discipline transverse associant les mathématiques appliquées, les statistiques et l'informatique. Elle s'applique à des problèmes usuels et joue un rôle-clé dans la recherche de l'efficacité². Grâce à elle, les décideurs peuvent analyser et mieux comprendre des situations complexes ou de grandes dimensions, aux interactions nombreuses et donc, faire des choix pertinents en toute connaissance de cause.

2. La programmation multi-objectif :

Dans un problème mono-objectif, il existe une seule fonction objectif bien définie pour laquelle on fait évaluer le système dans une certaine direction afin d'aboutir à une unique solution optimale. Cependant, dans certains cas, le recours à une seule fonction objective ne permet pas d'appréhender l'ensemble des points de vue ou aptitudes d'un système, ce qui peut conduire à étendre le problème d'optimisation au cadre multi-objectif³.

En effet, les origines de la programmation multi-objectif remontent à un article de CHARNES paru en 1955, mais il n'a pris réellement forme qu'en 1961, dans un ouvrage de CHARNES et COOPER. Depuis, ce modèle n'a cessé d'être développé et a fait l'objet d'une multitude de travaux académiques, de conférences et de publications diverses, et de nombreuses applications dans des domaines très diversifiés tels que : le marketing, la comptabilité et la gestion financière, l'agriculture, les télécommunications, ...etc⁴.

La programmation Mathématique à objectifs multiples est une approche de l'aide à la décision multicritère, utilisée dans l'analyse des contextes décisionnels de nature multidimensionnelle qui requièrent la prise en considération simultanée de plusieurs objectifs⁵. Un tel programme est constitué de plusieurs fonctions, certaines représentant plusieurs objectifs qui sont à optimiser (maximiser ou minimiser) et d'autres représentant les contraintes relatives au contexte étudié⁶. Ces contraintes peuvent prendre diverses formes reflétant, en général, les différentes ressources dont dispose l'entreprise (ressources financières et matérielles) et leurs emplois.

La résolution de ce type de programme se base sur une philosophie de satisfaction dans la recherche de la solution la plus satisfaisante parmi d'autres possibles. En outre, c'est une méthode qui se propose de trouver une solution qui permet de minimiser les écarts entre les niveaux de réalisation des différents objectifs et les buts fixés initialement par le décideur. Plus précisément, elle consiste à déterminer les variables d'écarts pour les objectifs. Si le but est dépassé, la déviation sera positive et dans le cas contraire, la déviation sera négative⁷.

La programmation multicritères (multi-objectif) comporte deux types de problématique⁸:

Problématique de choix multi-objectif : qui vise à identifier un ensemble aussi réduit que possible d'alternatives meilleures que les autres. Cet ensemble est constitué d'alternatives entre lesquelles il est difficile de choisir.

Problématique de rangement multi-objectif : qui vise à ranger les alternatives suivant un ordre de préférence. Elle établit un ordre ou pré ordre complet ou partiel sur l'ensemble des alternatives.

Donc il est nécessaire dans la formulation du modèle d'introduire les informations relatives aux préférences du décideur, choix des objectifs et leurs priorités. Celle-ci est également introduite par le biais de divers paramètres pouvant être sous forme de coefficients d'importance relative avec un certain ordre à titre d'exemple.

3. La formulation générale d'un problème de programmation multi-objectif :

La formulation du modèle multi-objectif consiste généralement à déterminer en premier lieu un ensemble de buts (objectifs). Ces derniers représentent des valeurs attribuées à un certain nombre d'objectifs retenus pour une situation décisionnelle donnée. Les buts ainsi définis reflètent les degrés d'aspiration que le décideur attribue à chaque objectif. Le programme de multi-objectif se propose de minimiser les déviations qui constituent les écarts enregistrés entre les degrés d'aspiration (objectifs) préalablement fixés par le décideur et leurs degrés de réalisation. Alors la solution la plus satisfaisante est établie de manière à ce que la somme totale des déviations pondérées et amplifiées soit minimisée.

La forme générale est exprimée sous la forme mathématique suivante :

$$\text{Minimiser } \left\{ \sum_{i=1}^p [w_i |g_i - f_i(x)|]^r \right\}^{1/r} \dots \dots (1)$$

Où :

X : Désigne l'ensemble des solutions réalisables ;

w_i : Le coefficient de pondération de l'objectif i ;

g_i : Le degré d'aspiration (le but) relatif à l'objectif i ;

$f_i(x)$: Le degré de réalisation de l'objectif i ;

r : Représente le paramètre qui définit la famille des fonctions distance ;

$|g_i - f_i(x)|$: Désigne la déviation absolue entre le niveau d'aspiration et celui de réalisation de l'objectif i.

La forme linéaire équivalente au programme précédant a été formulé par l'expression de CHARNES et COOPER en 1961 sous la forme suivante :

$$\text{Minimiser } Z = \sum_{i=1}^p (\delta_i^+ + \delta_i^-) \dots \dots (2)$$

$$s/c \begin{cases} f_i(x) + \delta_i^- - \delta_i^+ = g_i \text{ (pour } i = 1, 2, \dots, p); \\ x \in X; \\ \delta_i^- \text{ et } \delta_i^+ \geq 0 \text{ (pour } i = 1, 2, \dots, p); \end{cases}$$

Où :

δ_i^- et δ_i^+ : Indiquent respectivement les déviations négatives et positives relatives au i-ème but (objectif).

Ainsi, le programme (1) correspond au modèle linéaire alors que le programme (2) représente un cas particulier où le paramètre $r=1$, les coefficients de pondération $w_i = 1$ et les fonctions $f_i(x)$ sont linéaires.

En raison de la nature conflictuelle des objectifs, il n'y a généralement pas une solution réalisable qui minimise simultanément tous les objectifs. L'optimalité dans un contexte multicritères (multi-objectif) est basée sur la notion de dominance et d'efficacité au sens de pareto⁹.

II. Présentation du lieu objet de l'étude

1. Présentation de l'Entreprise

Notre étude a été menée au sein de l'entreprise algérienne de PRODUITS ABRASIFS unité de Saida situé à la zone industrielle de la wilaya. Cette société dont la dénomination commerciale est ABRAS, est une filiale du groupe ENAVA, (Entreprise Nationale des Verres et Abrasifs).

ABRAS a été créé en 1982 par la société autrichienne UNIVERSAL BAU avec acquisition du savoir-faire de la firme mondiale TYROLIT-Autriche qui durant la même année était rattachée à l'ENAVA.

ABRAS demeure l'unique entreprise de production des abrasifs au niveau national avec un capital estimé à 174500000 DA et une capacité de production égale à 1240 tonne/ans. Elle englobe dans son portefeuille client les grandes entreprises publiques et étatiques intervenant dans le domaine de construction mécanique, bois, métallurgie, fonderie, et travaux pétrolier.

Après avoir présenté l'activité de l'entreprise, il est nécessaire de définir qu'est-ce qu'un produit abrasif. Un abrasif est un corps dur cristallisé pouvant, par une action mécanique, découper des copeaux dans un corps moins dur que lui¹⁰.

L'entreprise a pour activité d'assurer la production de quatre (4) types principaux d'abrasifs :

- Meules bakélites ;
- Meules céramiques ;
- Disque d'abrasion (tronçonnage) ;
- Papier abrasif ;

Remarque : L'entreprise ABRAS ne produit pas le Papier abrasif, mais elle l'importe semi-fini de sociétés étrangères et se contente de le soumettre à un ensemble d'opération pour l'adapter aux exigences des clients¹¹. C'est pour cela qu'il ne sera pas pris en considération lors de la modélisation du programme linéaire multi-objectif.

2. Le processus de production des produits abrasif

Après le contrôle de la matière première, vérification qu'elle est conforme selon le laboratoire de contrôle de qualité au niveau de l'Entreprise et est prête à être utilisée, cette dernière sera transmise à l'atelier de fabrication pour subir plusieurs transformations dans les différentes sections de procédés.

Les abrasifs sont constitués de grains abrasifs, d'agents liants et des additifs pour être ensuite malaxés, façonnés, séchés et cuis. le produit passe par la suite par une étape importante qui est la finition. Pour rappel, après la cuisson, on obtient des produits avec des diamètres plus grands que ceux demandés dans la fiche de production, ce qui nécessite de passer à l'étape de finition (rectification)¹².

Après la phase finition les produits sont transportés vers la section de contrôle où ils sont soumis à un ensemble de tests pour prouver leurs efficacités et conformité aux normes internationales.

3. Présentation du champ d'application

Durant notre tournée dans les différents services de l'Entreprise, nous avons remarqué l'existence de plusieurs défis à réaliser que ce soit au niveau productif, commercial, au niveau de la direction générale et cela comme suite :

- La réalisation de la quantité de production de chaque produit demandé avec un minimum de chute (résidu résultant du processus de production). Donc, la rationalisation de l'affectation des ressources rares.
- Subvenir à la demande des clients au produit de l'Entreprise en respectant les quantités demandées et la durée d'exécution des commandes.
- Centrer sur les préoccupations des responsables qui sont la réalisation du plus grand profit possible en contre partie du coût de production le plus bas. (Maximisation du profit et minimisation des coûts).

Le problème auquel nous nous sommes confrontés et d'intervenir simultanément sur plusieurs objectifs contradictoires (minimiser le coût et maximiser le bénéfice), ce qui nécessite l'emploi d'une méthode d'optimisation capable de gérer le caractère multi-objectif du problème.

C'est pour cela que le travail de recherche a été réalisé dont le but de trouver un plan de production adéquat aux exigences de chaque service pour réaliser leurs objectifs et ce, tout en respectant les priorités données par l'Entreprise.

Alors, en premier lieu avant de procéder à la modélisation du programme, on doit définir les éléments importants et influents sur la prise de décision au niveau de l'Entreprise qui constituent les éléments sur lesquels repose le programme lexicographique qui se présente comme suit :

- Les produits ;
- Les ressources ;
- Les coûts et prix des produits ;
- Les objectifs de l'Entreprise en précisant l'ordre des priorités ;

Par la suite, nous allons présenter les types de produit de l'Entreprise, le prix unitaire, et le coût unitaire qui nous a permis de calculer le bénéfice unitaire dégagé de chaque produit.

Soit x_i la quantité de production des produits, sachant qu'il y a trois types de produits, donc on aura trois variables de décisions : $x_i = x_1, \dots, x_3$

Alors on pose les variables de décisions suivantes :

x_1 : définit la quantité de production du produit Meules bakélites ;

x_2 : définit la quantité de production du produit Meules céramiques ;

x_3 : définit la quantité de production du produit Disque d'abrasion ;

Sachant que les quantités de production sont valorisé au kilogramme, donc nos variables de décision peuvent prendre des valeurs continue et ne peuvent pas être négatif. Les variables utilisées dans la présente étude sont exprimées comme suite :

$$x_i \geq 0, (i = 1,2,3) \text{ et continue}$$

Remarque : Il est important de souligné que les données utilisées dans cette étude se rapportent à des données moyen annuelle de l'année 2020 qui sont calculé sur la base des documents de l'Entreprise.

• **Détermination des prix et des coûts de production :**

Le tableau suivant montre les coûts de production engendrés lors du processus de production (charges directes et indirectes) et les prix de vente posé à chaque produit par l'Entreprise tout en prenant compte la marge bénéficiaire.

Tableau 1. Coûts et prix des produits Unité (DA)

Produit	Coût (unité)	Prix (unité)	Profit (unité)
x_1	556	7 018	6 462
x_2	239	892	653
x_3	173	549	376

Source : Document comptable de l'entreprise d'ABRAS Saida

Celons le tableau précédant, l'Entreprise peut envisager soit maximisé son bénéfice en augmentant leurs ventes ou bien de minimiser ses coûts que l'on peut exprimer mathématiquement comme suite :

$$\begin{cases} \text{Max } Z = 7018x_1 + 892x_2 + 549x_3 \\ \text{Min } Z = 556x_1 + 239x_1 + 173x_3 \end{cases}$$

• **Détermination de l'utilisation des Matières premières :**

Le tableau suivant indique la quantité d'utilisation des trois matières premières entrent dans la fabrication des trois produits de l'Entreprise, à savoir :

Tableau 2. Utilisations des matières premières pour chaque produit Unité (Kg)

	x_1	x_2	x_3	Disponibilités
Grains abrasifs (c1)	1.15	30	0.65	35 000
Liant (c2)	0.2	5.55	0.4	10 000
Support (additifs) (c3)	0.08	0.55	0.35	2 000

Source : Document comptable de l'entreprise d'ABRAS Saida

Les contraintes de matière première

$$\begin{cases} 1.15x_1 + 30x_2 + 0.56x_3 \leq 35000 \\ 0.2x_1 + 5.55x_2 + 0.4x_3 \leq 10000 \\ 0.08x_1 + 0.55x_2 + 0.35x_3 \leq 2000 \end{cases}$$

• **Détermination des durées :**

Selon le processus de production cité en supra, aux nombres de jours de travail dans l'Entreprise et sur la base de fiche de production de chaque produit, nous avons établies la durée de passage des produits de chaque étape comme suite :

Tableau 3. Temps unitaire de production de chaque produit Unité (Heure)

	x_1	x_2	x_3	Disponibilités
Malaxage	0.035	1.166	0.035	1 992
Mise en forme	0.035	0.291	0.035	1 992
Séchage	0	0.214	0.021	1 992
Dressage	0.004	0.106	0.003	1 992
Cuisson	0.011	0.424	0.008	1 992
Finition	0.014	0.265	0.014	1 992
Contrôle	0.014	0.159	0.014	1 992

Source : fiche de production de l'Entreprise d'ABRAS Saïda

Remarque : Les disponibilités d'heure de travail on était calculées sur la base de nombre des jours par ans en soustrayant des jours fériés (jours de fêtes et des week-end).

Les contraintes des durées

$$s/c \begin{cases} 0.035x_1 + 0.166x_2 + 0.035x_3 \leq 1992 \\ 0.035x_1 + 0.291x_2 + 0.035x_3 \leq 1992 \\ 0.214x_2 + 0.021x_3 \leq 1992 \\ 0.004x_1 + 0.106x_2 + 0.003x_3 \leq 1992 \\ 0.011x_1 + 0.424x_2 + 0.008x_3 \leq 1992 \\ 0.014x_1 + 0.265x_2 + 0.014x_3 \leq 1992 \\ 0.014x_1 + 0.159x_2 + 0.014x_3 \leq 1992 \end{cases}$$

• **Détermination de la demande annuelle des produits :**

L'Entreprise a pour défit de répondre à la demande des produits quelle reçoit de la part des entreprises clientes qui est estimé annuelle de 350000 kg pour les produits x_1 et x_2 et une demande de 200000 pour le produit x_3 comme suite :

Les contraintes de la demande

$$\begin{cases} x_1 \geq 350000 \\ x_2 \geq 350000 \\ x_3 \geq 200000 \end{cases}$$

III. L'application de la programmation lexicographique

1. Modélisation

Pour modéliser le programme lexicographique représentant le cas de notre Entreprise, nous nous somme baser sur les données précédentes pour formuler les objectifs et contraintes y afférentes.

- **Déterminé les objectifs de l'Entreprise**

Après avoir déterminé les besoins de l'Entreprise et à travers les entretiens menés au sein de cette dernière, il a été identifié les objectifs suivants avec les priorités qui sont donnés comme suite :

Tableau 4. Les objectifs et leur ordre de priorité ainsi que leur déviation respective

Priorité	Objectif	Les déviations
P1: 1 ^{ère} Priorité	Répondre à la demande	$\delta_1^-, \delta_2^-, \delta_3^-$
P2: 2 ^{ème} Priorité	Minimisation des coûts	δ_4^+
P3: 3 ^{ème} Priorité	Rationalisation des ressources	$\delta_5^+, \delta_6^+, \delta_7^+, \delta_8^+, \delta_9^+, \delta_{10}^+, \delta_{11}^+, \delta_{12}^+, \delta_{13}^+, \delta_{14}^+$
P4: 4 ^{ème} Priorité	Maximisation du profit	δ_{15}^-

Source : Elaboré par l'auteur avec les responsables de l'entreprise

Après avoir attribué l'ordre de priorité et les déviations relative aux objectifs, nous avons modélisé le programme de l'entreprise exprimé ci-dessous ;

- **Le programme linéaire multi-objectif (lexicographique) de l'entreprise**

$$\text{Min } Z = P_1(\sum_1^3 \delta_j^-) + P_2(\delta_4^+) + P_3(\sum_1^{14} \delta_j^+) + P_4(\delta_{15}^-)$$

$$s/c \left\{ \begin{array}{l} x_1 + \delta_1^- - \delta_1^+ \geq 350000 \\ x_2 + \delta_2^- - \delta_2^+ \geq 350000 \\ x_3 + \delta_3^- - \delta_3^+ \geq 200000 \\ 556x_1 + 239x_2 + 173x_3 + \delta_4^- - \delta_4^+ \leq 437224000 \\ 1.15x_1 + 30x_2 + 0.56x_3 + \delta_5^- - \delta_5^+ \leq 35000 \\ 0.2x_1 + 5.55x_2 + 0.4x_3 + \delta_6^- - \delta_6^+ \leq 10000 \\ 0.08x_1 + 0.55x_2 + 0.35x_3 + \delta_7^- - \delta_7^+ \leq 2000 \\ 0.035x_1 + 0.166x_2 + 0.035x_3 + \delta_8^- - \delta_8^+ \leq 1992 \\ 0.035x_1 + 0.291x_2 + 0.035x_3 + \delta_9^- - \delta_9^+ \leq 1992 \\ 0.214x_2 + 0.021x_3 + \delta_{10}^- - \delta_{10}^+ \leq 1992 \\ 0.004x_1 + 0.106x_2 + 0.003x_3 + \delta_{11}^- - \delta_{11}^+ \leq 1992 \\ 0.011x_1 + 0.424x_2 + 0.008x_3 + \delta_{12}^- - \delta_{12}^+ \leq 1992 \\ 0.014x_1 + 0.265x_2 + 0.014x_3 + \delta_{13}^- - \delta_{13}^+ \leq 1992 \\ 0.014x_1 + 0.159x_2 + 0.014x_3 + \delta_{14}^- - \delta_{14}^+ \leq 1992 \\ 7018x_1 + 892x_2 + 549x_3 + \delta_{15}^- - \delta_{15}^+ \geq 4059512000 \\ x_i \geq 0 \quad \text{et } (i = 1,2,3) \\ \delta_j^\pm \geq 0 \quad \text{et } (j = 1,2, \dots, 15) \end{array} \right.$$

2. Résolution du modèle et interprétation des résultats

- **Processus de résolution :**

Nous avons procédé à la résolution du programme à l'aide du logiciel Win QSB après avoir déterminé les différents objectifs à atteindre et leur ordre de priorité, en y intégrant les variables et

contraintes correspondantes au programme, puis on a procédé à la résolution par étapes (la réalisation des objectifs un par un).

• **Les résultats obtenus :**

Le tableau suivant résume les résultats obtenus lors de la résolution du programme grâce au logiciel Win QSB comme suite :

Tableau 5. Récapitulatifs des résultats

Les étape	Résultat	La fonction objectif	les déviations	Quantité de production	Ressources
Etape1	Réalisé	G1=0	$\sum_1^3 \delta_j^- = 0$	$\begin{cases} x_1 = 518311.78 \\ x_2 = 350000 \\ x_3 = 200000 \end{cases}$	Epuisé
Etape2	Réalisé	G1=0	$\delta_4^+ = 0$	$\begin{cases} x_1 = 518311.78 \\ x_2 = 350000 \\ x_3 = 200000 \end{cases}$	Epuisé
Etape3	Réalisé	G1=0	$\sum_1^{14} \delta_j^+ = 0$	$\begin{cases} x_1 = 23055.16 \\ x_2 = 282.89 \\ x_3 = 0 \end{cases}$	Epuisé Sauf c_1
Etape4	Non Réalisé	G1≠0	$\begin{matrix} \sum_1^3 \delta_j^- = 0 \\ \delta_4^+ = 0 \\ \sum_1^{14} \delta_j^+ \neq 0 \\ \delta_{15}^- = 0 \end{matrix}$	$\begin{cases} x_1 = 578442.88 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$	Epuisé

Source : Elaboré par l'auteur d'après les résultats obtenus par le logiciel Win QSB

• **Analyse des résultats :**

D'après les résultats obtenus, nous constatons que l'Entreprise ne pourra pas réaliser les quatre objectifs à la fois, mais elle a la possibilité de réaliser les trois objectifs les plus prioritaires et elle devra renoncer à réaliser le quatrième (Maximisation du profit) objectif ou bien si nécessaire de revoir sa politique de priorité.

D'autre part en prenant en considération les priorités établies par l'Entreprise, le choix du meilleur programme qui répond aux exigences de cette dernière se portera vers celui de la troisième étape qui est liée à l'annexe n°1 et ce, en sachant que ce programme réduit les déviations de la fonction objectif jusqu'à ce que G1=0 et propose le plan de production suivant :

$$\begin{cases} x_1 = 23055.16 \\ x_2 = 282.89 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Combien même ce programme a données des résultats satisfaisants de façon générale, hélas ce dernier ne remplit pas tous les critères puisque l'Entreprise doit se passer de satisfaire la demande pour le produit x_3 : Disque d'abrasion qui pourrait lui coûter la confiance de ses clients fidèles et pour cela que nous conseillons l'Entreprise de se suffire des deux premiers objectifs (répondre à la demande de son produit et minimiser ses coûts de production), exprimé par la deuxième étape liée à l'annexe n°2 qui de notre part est celui sélectionné comme étant le modèle optimal pour cet exercice.

De part ce qui précède, nous proposons d'essayer de revoir le plan d'approvisionnement pour rationaliser les ressources et par la même occasion réaliser le troisième objectif.

On note également, la pleine utilisation des disponibilités en durée de production et matières premières sauf pour $c_1 = 168311.78$ qui est démontré dans la colonne (slack or surplus) dans l'annexe n°2.

Concernant la colonne "shadow price", on remarque que toutes les variables prennent la valeur de 0 ce qui confirme que lors de l'ajout d'une unité de ressources, cela n'impactera pas le résultat optimal obtenu.

3. Analyse de la stabilité du programme

L'obtention d'une solution optimale est liée aux données initiales (les coefficients techniques, les disponibilités des ressources, niveau d'ambition ...etc). Sachant que ses résultats sont exposés aux différents changements de l'environnement interne et externe de l'Entreprise, il est donc impératif de tester la stabilité de notre modèle face à ces changements possibles, et précisément nous nous centrons sur les deux cas de figure les plus importantes :

- **Sensibilité de la fonction objective**

Selon les résultats de l'annexe n°3, on peut dire que si l'Entreprise souhaite changer ses niveaux d'ambition vers ces objectifs d'une variable β qui est non nulle ($\beta \neq 0$), cette dernière doit respecter les intervalles cités dans l'annexe n°3, comme suite :

Tableau 6. Intervalle de sensibilité des coefficients des objectifs

Satisfaire la demande	$[0. \infty[$
Minimiser les coûts	$[0. \infty[$
Maximiser les ventes	$[0. \infty[$

Source : Elaboré par l'auteur d'après les résultats obtenus.

Pour n'importe quel changement subit à l'intérieur de cet intervalle, la solution optimale restera constante et le modèle restera stable.

- **Sensibilité des ressources**

Le tableau suivant résume les résultats obtenus pour la sensibilité des ressources.

Tableau 7. Intervalle de sensibilité des ressources

Contrainte	Ressources	Intervalle
Matières premières	Grains abrasifs] -∞ , 35000]
	Liant] -∞ , 10000]
	Support (additifs)] -∞ , 2000]
Durée de production	Malaxage] -∞ , 83240.91]
	Mise en forme] -∞ , 126990.91]
	Séchage] -∞ , 79100]
	Dressage] -∞ , 58432.47]
	Cuisson] -∞ , 155701.42]
	Finition] -∞ , 102806.36]
	Contrôle] -∞ , 65706.36]

Source : Elaboré par l'auteur d'après les résultats obtenus

D'après le tableau précédant, on peut déduire que l'Entreprise a un large choix pour procéder à des changements concernant son plan d'exécution pour la production de ces produits, tout en respectant les intervalles obtenus pour les résultats retenus. Ces intervalles respectifs concernent les ressources de matières premières et des durées de production qui permettent la stabilité des résultats et du programme. Tout changement hors de ces intervalles le modèle ne sera plus valide.

Conclusion

La programmation linéaire constitue un outil très efficace à la résolution simultanément plusieurs problèmes de gestion, y compris les problèmes de multi-objectifs connue sous la forme de programmation lexicographique, qui consiste à trouver un plant de production permettant de réaliser la totalité des objectifs émis par l'Entreprise et aide à la prise de la décision multiples, conflictuelles et pertinentes, surtout dans un environnement de concurrence agressif.

Pour conforter notre démarche, nous nous sommes proposés d'appliquer la méthode de programmation lexicographique dans le processus de production de l'entreprise ABRAS production de produit abrasifs en Algérie. Ce choix de terrain de modélisation a été justifié par la nature de l'Entreprise étatique et unique dans son domaine. Cette spécificité de l'Entreprise nous a permis de bien analyser le processus de production pour proposer notre contribution en vue de renforcer et d'améliorer la prise de décision, notamment le choix de quantité de production.

Cette étude a effectivement abouti à des résultats concluants surtout que le programme modalisé a répondu à toutes les exigences de réalisation des objectifs voulus, malgré que le programme ne satisfait pas le dernier objectif. Ce dernier présente deux possibilité à l'Entreprise : soit de se suffire à réaliser les trois premier objectifs émis par elle ou bien de revoir sa politique de priorité.

Résultats et recommandations :

- La programmation linéaire multicritère est une méthode élaborées dans le but d'éclairer un décideur sur son choix en fonction de ses multiples points de vue et objectifs. C'est pour cela que la modélisation des préférences (identification et classification des objectifs) du décideur constitue une étape primordiale de l'aide à la prise de décision.

- La résolution du modèle de programmation linéaire multi-objectif ne cherche plus à l'optimum d'un seul critère ou objectif, mais plutôt, la recherche d'un compromis qui doit satisfaire les différents objectifs.
- Nous recommandant à l'Entreprise de revoir sont plant d'approvisionnement de matières premières qui doit être en adéquation avec son activité de production dans le but de rationaliser ses ressources.
- L'Entreprise doit revoir sa politique et les objectifs émis pour mieux optimiser les résultats, tout en sachant que les objectif mis par cette dernière ne peuvent pas être exécutés tous à la fois.

Annexe

Résolution du programme (étape 3) sur Win QSB

Goal Level	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
G1	X1	23 055,16	0	0	0	0	0
G1	X2	282,89	0	0	0	0	0
G1	X3	0	0	0	0	0	M
G1	N1	326 944,84	0	0	0	0	0
G1	P1	0	1,00	0	1,00	0	M
G1	N2	349 717,13	0	0	0	0	0
G1	P2	0	1,00	0	1,00	0	M
G1	N3	200 000,00	0	0	0	0	0
G1	P3	0	1,00	0	1,00	0	M
G1	N4	0	1,00	0	1,00	0	M
G1	P4	0	0	0	0	0	M
G1	N5	0	0	0	0	0	M
G1	P5	0	1,00	0	1,00	0	M
G1	N6	3 818,95	0	0	0	0	0
G1	P6	0	1,00	0	1,00	0	M
G1	N7	0	0	0	0	0	M
G1	P7	0	1,00	0	1,00	0	M
G1	N8	1 138,11	0	0	0	0	0
G1	P8	0	1,00	0	1,00	0	M
G1	N9	1 102,75	0	0	0	0	0
G1	P9	0	1,00	0	1,00	0	M
G1	N10	1 931,46	0	0	0	0	0
G1	P10	0	1,00	0	1,00	0	M
G1	N11	1 039,81	0	0	0	0	0
G1	P11	0	1,00	0	1,00	0	M
G1	N12	1 618,45	0	0	0	0	0
G1	P12	0	1,00	0	1,00	0	M
G1	N13	1 594,26	0	0	0	0	0
G1	P13	0	1,00	0	1,00	0	M
G1	N14	1 624,25	0	0	0	0	0
G1	P14	0	1,00	0	1,00	0	M
G1	N15	3 897 458 688,00	0	0	0	0	0
G1	P15	0	0	0	0	0	M
G1	Goal	Value	[Min.] =	0	[Alternate	Solution	Exists!!]

Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS	ShadowPrice Goal 1
C1	350 000,00	>=	350 000,00	0	23 055,16	M	0
C2	350 000,00	>=	350 000,00	0	282,88	M	0
C3	200 000,00	>=	200 000,00	0	0	M	0
C4	12 886 281,00	<=	437 224 000,00	424 337 728,00	12 886 272,00	M	0
C5	35 000,00	<=	35 000,00	0	28 750,00	55 209,58	0
C6	10 000,00	<=	10 000,00	0	6 181,05	M	0
C7	2 000,00	<=	2 000,00	0	641,67	2 434,78	0
C8	1 992,00	<=	1 992,00	0	853,89	M	0
C9	1 992,00	<=	1 992,00	0	889,25	M	0
C10	1 992,00	<=	1 992,00	0	60,54	M	0
C11	1 992,00	<=	1 992,00	0	952,19	M	0
C12	1 992,00	<=	1 992,00	0	373,55	M	0
C13	1 992,00	<=	1 992,00	0	397,74	M	0
C14	1 992,00	<=	1 992,00	0	367,75	M	0
C15	4 059 512 064,00	>=	4 059 512 064,00	0	162 053 376,00	M	0

Résolution du programme (étape 2) sur Win QSB

Goal Level	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
G1	X1	518 311,78	0	0	0	0	0
G1	X2	350 000,00	0	0	0	0	0
G1	X3	200 000,00	0	0	0	0	0
G1	N1	0	0	0	0	0	M
G1	P1	0	1,00	0	1,00	0	M
G1	N2	0	0	0	0	0	M
G1	P2	0	1,00	0	1,00	0	M
G1	N3	0	0	0	0	0	M
G1	P3	0	1,00	0	1,00	0	M
G1	N4	0	1,00	0	1,00	0	M
G1	P4	0	0	0	0	0	M
G1	N5	0	0	0	0	0	M
G1	P5	11 173 059,00	0	0	0	0	0
G1	N6	0	0	0	0	0	M
G1	P6	2 116 162,50	0	0	0	0	0
G1	N7	0	0	0	0	0	M
G1	P7	301 964,94	0	0	0	0	0
G1	N8	0	0	0	0	0	M
G1	P8	81 248,91	0	0	0	0	0
G1	N9	0	0	0	0	0	M
G1	P9	124 998,91	0	0	0	0	0
G1	N10	0	0	0	0	0	M
G1	P10	77 108,00	0	0	0	0	0
G1	N11	0	0	0	0	0	M
G1	P11	56 440,47	0	0	0	0	0
G1	N12	0	0	0	0	0	M
G1	P12	153 709,42	0	0	0	0	0
G1	N13	0	0	0	0	0	M
G1	P13	100 814,36	0	0	0	0	0
G1	N14	0	0	0	0	0	M
G1	P14	63 714,36	0	0	0	0	0
G1	N15	0	0	0	0	0	M
G1	P15	0	0	0	0	0	M
G1	Goal	Value	(Min.) =	0	(Alternate	Solution	Exists!!)

Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS	ShadowPrice Goal 1
C1	518 311,78	>=	350 000,00	168 311,78	-M	518 311,78	0
C2	350 000,00	>=	350 000,00	0	0	532 928,69	0
C3	200 000,00	>=	200 000,00	0	0	437 770,88	0
C4	406 431 360,00	<=	437 224 000,00	30 792 650,00	406 431 360,00	M	0
C5	35 000,00	<=	35 000,00	0	-M	11 208 059,00	0
C6	10 000,00	<=	10 000,00	0	-M	2 126 162,50	0
C7	2 000,00	<=	2 000,00	0	-M	303 964,94	0
C8	1 992,00	<=	1 992,00	0	-M	83 240,91	0
C9	1 992,00	<=	1 992,00	0	-M	126 990,91	0
C10	1 992,00	<=	1 992,00	0	-M	79 100,00	0
C11	1 992,00	<=	1 992,00	0	-M	58 432,47	0
C12	1 992,00	<=	1 992,00	0	-M	155 701,42	0
C13	1 992,00	<=	1 992,00	0	-M	102 806,36	0
C14	1 992,00	<=	1 992,00	0	-M	65 706,36	0
C15	4 059 512 064,00	>=	4 059 512 064,00	0	2 878 300 160,00	4 448 186 368,00	0

Decision Variable	Goal Level	Reduced Cost	Unit Cost or Profit c(j)	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
X1	G1	0	0	0	0
X2	G1	0	0	0	0
X3	G1	0	0	0	0
N1	G1	0	0	0	M
P1	G1	1,00	1,00	0	M
N2	G1	0	0	0	M
P2	G1	1,00	1,00	0	M
N3	G1	0	0	0	M
P3	G1	1,00	1,00	0	M
N4	G1	1,00	1,00	0	M
P4	G1	0	0	0	M
N5	G1	0	0	0	M
P5	G1	0	0	0	0
N6	G1	0	0	0	M
P6	G1	0	0	0	0
N7	G1	0	0	0	M
P7	G1	0	0	0	0
N8	G1	0	0	0	M
P8	G1	0	0	0	0
N9	G1	0	0	0	M
P9	G1	0	0	0	0
N10	G1	0	0	0	M
P10	G1	0	0	0	0
N11	G1	0	0	0	M
P11	G1	0	0	0	0
N12	G1	0	0	0	M
P12	G1	0	0	0	0
N13	G1	0	0	0	M
P13	G1	0	0	0	0
N14	G1	0	0	0	M
P14	G1	0	0	0	0
N15	G1	0	0	0	M
P15	G1	0	0	0	M

2- Sensibilité des ressources sur Win QSB

Constraint	Direction	Right Hand Side	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS	Shadow Price Goal 1
C1	>=	350 000,00	-M	518 311,78	0
C2	>=	350 000,00	0	532 928,69	0
C3	>=	200 000,00	0	437 770,88	0
C4	<=	437 224 000,00	406 431 360,00	M	0
C5	<=	35 000,00	-M	11 208 059,00	0
C6	<=	10 000,00	-M	2 126 162,50	0
C7	<=	2 000,00	-M	303 964,94	0
C8	<=	1 992,00	-M	83 240,91	0
C9	<=	1 992,00	-M	126 990,91	0
C10	<=	1 992,00	-M	79 100,00	0
C11	<=	1 992,00	-M	58 432,47	0
C12	<=	1 992,00	-M	155 701,42	0
C13	<=	1 992,00	-M	102 806,36	0
C14	<=	1 992,00	-M	65 706,36	0
C15	>=	4 059 512 064,00	2 878 300 160,00	4 448 186 368,00	0

Bibliographies

¹ Fabian bastin (2010), modèles de recherche opérationnelle, d'département d'informatique de recherche opérationnelle, Université de Montréal.

² Centre de doctrine d'emploi des forces (division simulation et recherche opérationnelle), cahier de recherche opérationnelle, ministère de la défense

³ Nicolas Piegay (2015), Optimisation multi-objectif et aide à la décision pour la conception robuste, thèse de doctorat, spécialité : Mécanique, université de Bordeaux, p35.

⁴ Aouni.B and O.Kettani (2001), Goal Programming Model : A Glorious History and a Promising Future, European Journal Research, Vol. 133, No.2, p1-p7.

⁵ Kettani.o (1988), Nouvelles formulations des problèmes de choix multicritère basées sur la programmation mathématique, Thèse de doctorat, Faculté des sciences de l'administration, Université Laval.

⁶ Evans, GW (1984), An Overview of Techniques for Solving Multiobjective Mathematical Programs, Management Science, Vol.30, No.11, p1268

⁷ Belaid Aouni, Foued Ben Abdelaziz, jean-marc Martel (2005), Decision-Maker's Preferences Modeling in the Stochastic Goal Programming, vol 162, p610

⁸ Zohra Sabrina Delhoum (2018), La Minimisation des Polynômes et la Méthode Adaptée du Support, Thèse Doctorat, Faculté des Sciences Exactes et Appliquées, université d'Oran, P71.

⁹ Manel Maamar (2015), Modélisation et Optimisation Bi-objectif et Multi-période avec anticipation d'une place de marché de prospects internet : Adéquation offre/demande, Thèse Doctorat, Université de Paris-Saclay, p35.

¹⁰ Jean-Louis Douzet (1990), travail des matériaux – assemblage « Abrasifs », techniques de l'ingénieur BT, Vol.BT1.

¹¹ Document interne de l'entreprise d'ABRAS Saida

¹² Document interne de l'entreprise d'ABRAS Saida