Proposition d'une règle pour déterminer la variable entrante en présence de plus d'une variable candidate pour être la variable entrante

Proposal of a rule to determine the incoming variable in the presence of more than one candidate variable to be the incoming variable

Dr. Hamid Setti [1]
Université Ibn-Khaldoun ,Tiaret- Algérie
hamidsetti2013@gmail.com

Dr. Hattab Mourad
Université Hassiba Benbouali ,Chlef- Algérie
m.hattab@univ-chlef.dz

Received: 10/03/2021 *Accepted: 29/03/2021* *Published: 24/06/2021*

Résumé

L'objet de cet article est de présenter et proposer un critère ou une règle relative au choix et à la sélection de la variable entrante lors de l'application de l'algorithme du simplexe à un modèle de programmation linéaire de type maximisation ou de type minimisation, dans le cas de la présence de plusieurs variables hors base candidates être choisies et sélectionnées comme variable entrante. L'énoncé de cette règle est, la variable entrante est la variable hors base nulle parmi les variables candidates d'être choisies comme variable entrante qui entraine une variation élevée à la valeur de la fonction objective. L'application de l'énoncé de cette règle nous permet d'atteindre la solution de base réalisable optimale avec un nombre d'itérations moins élevé, et par-conséquence obtenir la solution optimale avec un nombre de tableau du simplexe moins élevé.

Mots clés : *Programmation linéaire, l'algorithme du simplexe, la variable entrante, optimisation, la variable sortante.*

Abstract

The object of this article is to present and propose a criterion or rule relating to the choice and the selection of the entering variable during the application of the simplex algorithm to a linear programming model of maximization-type or minimization-type in the case where there are several non-basic candidate variables to be chosen and selected as entering variable. The statement of the rule is, the entering variable is the non-basic variable which causes a very high variation in the value of the objective function. The application of this rule allows us to reach and obtain the optimal solution with a lower number of iterations and consequently obtain optimal solution with a lower number of simplex tables

Key words: *Linear programming, simplex algorithm, entering variable, optimization, departing variable*

1. Introduction

Il existe plusieurs méthodes d'optimisation des modèles de programmation linéaires, la méthode graphique appelée aussi géométrique est utilisée pour résoudre les modèles de programmation linéaire qui comportent que deux variables de décision. La deuxième est la méthode par énumération des solutions de base qui consiste à énumérer toutes les solutions de base du modèle dans une première phase, dans une deuxième phase choisir celles qui sont réalisables, la troisième et la dernière phase est l'évaluation de la fonction objective à chaque solution de base réalisable, et la solution optimale est la solution de base réalisable qui optimise la fonction objective (économique) c-à-d. qui donne la valeur optimale à la fonction économique. La troisième est la méthode est la méthode (l'algorithme) du simplexe développée en 1947 par ***George Dantzig***. Le principe [1] Le principe de cette dernière est, à partir d'une solution de base réalisable (c-à-d. un point extrême de la région des solutions réalisables) appelée solution de base réalisable de départ, on obtient (on se déplace vers) une autre ou une nouvelle solution de base réalisable adjacente (c-à-d. un point extrême voisin) meilleure par rapport à la précédente (c-à-d. donne à la fonction une valeur meilleure).[2] On poursuit le déplacement jusqu'à ce qu'on ne puisse plus obtenir d'une solution de

[1] *- Corresponding author: Setti Hamid: hamidsetti2013@gmail.com*

base réalisable améliorant la fonction objectif. Le passage d'une solution de base réalisable à une autre meilleure ce fait par le choix de la variable entrante qui se transforme d'une variable hors base nulle à une variable de base positive.[3] Suivant le critère relatif au choix de la variable entrante, cette dernière est la variable hors base nulle ayant le coefficient $(C_j - Z_j)$ positif le plus élevé. Parfois il peut arriver que lors d'une étape ou d'un processus d'amélioration de la solution de base actuelle et précisément dans l'étape liée à la détermination et la selection de la variable entrante, plusieurs variables sont candidates pour être une variable entrante comme le montre l'exemple cité ci-dessous. Dans cette situation on sait plus quelle variable conditate sera choisie. La question qui se pose est la suivante :

Est-ce qu'il y a un critère ou une règle relative au choix et à la sélection de la variable entrante dans le cas de la présence de plusieurs variables hors base candidates d'être choisies comme variable entrante ?

La réponse sur cette question est l'objectif de cet article.

2. La variable entrante en l'algorithme du Simplexe:

Lors de l'application de la méthode du simplexe sous sa forme tableau, et plus précisément dans La phase d'amélioration de la solution de base actuelle, qui exige la sélection et la détermination de la variable entrante.[4]

2.1. Définition de la variable entrante:

La variable entrante en simplexe est la variable hors base nulle dans le tableau du simplexe actuel qui se transforme en variable de base positive dans le prochain tableau du simplexe.[5]

2.2. Critère du choix de la variable entrante:

Suivant le critère relatif à la sélection de la variable entrante est, la variable hors base ayant le coefficient $(C_j - Z_j)$ le plus élevé dans le cas d'un modèle de programmation linéaire de type maximisation.[6] Cela se traduit par:

$$\underset{j \in H}{Max} \left[(C_j - Z_j) \; ; \; (C_j - Z_j) > 0 \right]$$

3. Le choix aléatoire de la variable entrante en présence de plusieurs variables candidates est-il suffisant ?

L'énoncé du critère du choix de la variable entrante est, la variable hors base nulle ayant le coefficient $(C_j - Z_j)$ positif le plus élevé.[7] Le plus grand coefficient positif pour une seule raison, est d'atteindre la solution de base réalisable optimale après quelques améliorations c-à-d. avec un nombre d'itérations moins élevé, et par conséquence avec un nombre moins élevé des tableaux du simplexe, économisant l'ensemble des efforts dans les calculs et donc gain de temps pour atteindre la solution réalisable optimale. Nous signalons qu'il existe des cas et des modèles de programmation linéaire dans lesquels le critère de détermination de la variable entrante est appliqué, mais la solution de base acceptable optimale est atteinte après un plus grand nombre d'améliorations, c'est-à-dire avec un plus grand nombre des tables simplexe. Cette situation se produit lorsque nous sommes devant une variable en dehors d'une base nulle qui se transforme en une variable de base positive, et après une ou plusieurs améliorations (après une ou quelques itérations) la même variable revient pour se transformer d'une variable de base positive en une variable hors base nulle comme le montre le modèle de programmation linéaire ci-dessous et de nombreux modèles similaires.

3.1. Le critère de choix de la variable entrante à travers un exemple:

Soit le modèle de programmation linéaire de type maximisation suivant:

$$Max\ Z = 120X_1 + 120X_2 + 100X_3 + 120X_4$$

Soumise Aux Contraintes

$$01X_1 + 09X_2 + 08X_3 + 04X_4 \le 600$$

$$04X_1 + 01X_2 + 03X_3 + 01X_4 \leq 400$$
$$01X_1 + 03X_2 + 02X_3 + 02X_4 \leq 800$$
$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

En appliquant le critère ci-dessus relatif au choix de la variable entrante, on obtient la solution réalisable optimale avec quatre tableaux du simplexe comme est illustré ci-dessous

Tableau N° 01

	$C_j \rightarrow$	120	120	100	120	00	00	00	
$C_B \downarrow$	$V_B \downarrow$	$X_1 \uparrow$	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3	B
00	S_1	01	09	08	04	01	00	00	600
00	$\leftarrow S_2$	**04**	01	03	01	00	01	00	400
00	S_3	01	03	02	02	00	00	01	800
Z_j		00	00	00	00	00	00	00	
$C_j - Z_j$		120	120	100	120	00	00	00	$Z = 00$

En examinant le premier tableau du simplexe ci-dessus, nous remarquons qu'il existe trois variables hors base X_1, X_2 et X_4 ont le même coefficient $C_j - Z_j$ le plus élevé, cela implique que ces trois variables hors base sont candidates d'être choisis et sélectionner comme variable entrante. Suivant le critère de choix de la variable entrante, on peut choisir n'importe quelle variable parmi les trois. Le choix de la variable entrante sera aléatoirement soit X_2 comme le montre le tableau ci-dessous.

Tableau N° 02

	$C_j \rightarrow$	120	120	100	120	00	00	00	
$C_B \downarrow$	$V_B \downarrow$	X_1	$X_2 \uparrow$	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3	B
00	$\leftarrow S_1$	00	**35/4**	29/4	15/4	01	-1/4	00	500
120	X_1	01	1/4	3/4	1/4	00	1/4	00	100
00	S_3	00	11/4	5/4	7/4	00	-1/4	01	700
Z_j		120	30	90	30	00	30	00	
$C_j - Z_j$		00	90	10	90	00	-30	00	$Z = 12000$

Tableau N° 03

	$C_j \rightarrow$	120	120	100	120	00	00	00	
$C_B \downarrow$	$V_B \downarrow$	X_1	X_2	X_3	$X_4 \uparrow$	S_1	S_2	S_3	B
120	$\leftarrow X_2$	00	01	29/35	**3/7**	4/35	-1/35	00	400/7
120	X_1	01	00	19/35	1/7	-1/35	9/35	00	600/7

00	S_3	00	00	-36/35	4/7	-11/35	-6/35	01	3800/7
Z_j		120	120	1152/7	480/7	72/7	192/7	00	
$C_j - Z_j$		00	00	-452/7	360/7	-72/7	-192/7	00	$Z = 120000/7$

Tableau N° 04

$C_j \rightarrow$		120	120	100	120	00	00	00	
$C_B \downarrow$	$V_B \downarrow$	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3	B
120	X_4	00	7/3	29/15	01	4/15	-1/15	00	400/3
120	X_1	01	-1/3	4/15	00	-1/15	4/15	00	200/3
00	S_3	00	-4/3	-32/15	00	-7/15	-2/15	01	1400/3
Z_j		120	120	264	120	24	24	00	
$C_j - Z_j$		00	00	-164	00	-25	-24	00	$Z = 24000$

La solution de base réalisable équivalente au dernier tableau du simplexe est la suivante :

- Variables de base positives : $X_1 = \frac{200}{3}$; $X_4 = \frac{400}{3}$; $S_3 = \frac{1400}{3}$
- Variables hors base nulles : $X_2 = X_3 = S_1 = S_2 = 00$ $X_1 = X_3 = S_2 = 00$
- Valeur de la fonction objective : $Z = 24000$

- **Test d'optimalité**

Tant-que tous les coefficients $(C_j - Z_j)$ des variables hors base sont négatifs, la solution de base réalisable optimale est atteinte et elle est unique.

Remarques:

- ✓ La sélection de la variable entrante parmi les trois candidates est faite avec une manière aléatoire.
- ✓ La solution de base réalisable optimale est obtenue avec quatre tableaux du simplexe.
- ✓ La solution de base réalisable optimale est obtenue après trois itérations

4. Présentation de la règle proposeé et son interprétation économique:

A travers ce paragraphe nous allons présenter la règle proposée, ainsi que l'interprétation économique de cette règle et l'application de cette dernière sur un modèle de programmation linéaire de type maximisation.

4.1. Présentation de la règle proposée:

Selon cette règle proposée relative à la sélection et au choix de la variable entrante parmi plusieurs variables candidates d'être la variable entrante, cette dernière est la variable hors base nulle parmi ces variables candidates qui entraine une variation élevée à la fonction objective, c-à-d. qui entraine une augmentation (diminution) la plus élevée dans le cas d'un modèle de programmation linéaire de type maximisation et une diminution la plus élevée dans le cas d'un modèle de programmation linéaire de type minimisation. C'est pour cela nous devons calculer l'effet et l'impact noté VZ_j de la sélection de chaque variable candidate sur la fonction objective dans le prochain tableau c-à-d. dans la prochaine solution de base réalisable. Avant de calculer cet effet nous devons calculer la valeur prévue notée VX_j de chaque variable candidate dans le prochain tableau du simplexe c-à-d. dans la prochaine solution de base réalisable. Pour calculer cette valeur prévue nous devons calculer les ratios notés R_i pour chaque variable hors base candidate $V.H.C$. Donc pour déterminer la variable entrante suivant la règle proposée nous devons suivre les étapes suivantes:

1. **1.** Pour chaque variable hors base X_j candidate on calcule les ratios $\overset{X_j}{R_i}$

$$\overset{X_j}{R_i} = \frac{b_i}{a_{ij}} \ , \ (j \in V.H.C) \ , \ (i = 1,...,m) \ , \ a_{ij} > 0$$

2. **2.** Pour chaque variable hors base X_j candidate on calcule VX_j

$$VX_j = Min\left(\overset{X_j}{R_i}\right) \ , \ (i = 1,...,m)$$

3. **3.** Pour chaque variable hors base X_j candidate on calcule VZ_j

$$VZ_j = (C_j - Z_j) \times VX_j$$

4. **4.** La variable hors base X_j entrante parmi les variables hors base candidates est celle qui correspond au VZ_j le plus élevé c-a-d. X_j correspond au $Max\,(VZ_j)$, $(j \in V.H.C)$

4.2. L'interprétation économique de la règle proposée:

- $\overset{X_j}{R_i}$: représente les valeurs possibles de la variable X_j
- VX_j : représente la valeur qui sera prise par la variable X_j dans le prochain tableau dans le cas où elle est sélectionnée comme variable entrante dans le tableau actuel. Pour obtenir VX_j on divise les éléments b_i du vecteur B sur les éléments a_{ij} positifs du vecteur de la variable X_j, la valeur de X_j notée VX_j égale au plus petit ratio R_i

$$VX_j = Min\left(R_i = \frac{b_i}{a_{ij}}\right) \ , \ (j \in V.H.C) \ , \ (i = 1,...,m) \ , \ a_{ij} > 0$$

- VZ_j : représente la variation de la fonction objective Z dans le cas où la variable hors base X_j est sélectionnée comme variable entrante dans le tableau actuel.

4.3. La règle proposée à travers un exemple:

Dans le but de clarifier et d'expliquer comment utiliser la règle proposée pour la sélection et le choix de la variable entrante dans le cas où de nombreuses variables sont candidates pour être une variable entrante, nous allons appliquer cette règle sur l'exemple cité ci-dessus.

- **Formulation du premier tableau du simplexe**

Le premier tableau du simplexe reflète le modèle de programmation linéaire sous sa forme standard.

	$C_j \rightarrow$	120	120	100	120	00	00	00	
$C_B \downarrow$	$V_B \downarrow$	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3	B
00	S_1	01	09	08	04	01	00	00	600
00	S_2	04	01	03	01	00	01	00	400

00	S_3	01	03	02	02	00	00	01	800
Z_j		00	00	00	00	00	00	00	
$C_j - Z_j$		120	120	100	120	00	00	00	$Z = 00$

- **Choix de la variable entrante**

En examinant le premier tableau du simplexe ci-dessus, on remarque que les trois variables hors base X_1, X_2 et X_4 ont le même coefficient $C_j - Z_j$ le plus élevé, cela implique que ces trois variables hors base sont candidates d'être choisis et sélectionner comme variable entrante. Pour choisir celle parmi ces variables candidates en appliquant la règle proposée nous devons suivre les étapes citées ci-dessus :

a. Pour chaque variable hors base candidate X_j on calcule les ratios $\overset{X_j}{R_i}$

Les ratios R_i correspondent à la variable hors base candidate X_j notés $\overset{X_j}{R_i}$:

$$\overset{X_j}{R_i} = \frac{b_i}{a_{ij}} \ , \ \left(j \in V.H.C\right) \ , \ \left(i = 1,\ldots,m = 3\right) \ , \ a_{ij} > 0$$

- Les ratios R_i correspondent à la variable hors base candidate X_1 notés $\overset{X_1}{R_i} = \frac{b_i}{a_{i1}}$, $\left(i = 1,\ldots,3\right)$

✓ $\overset{X_1}{R_1} = \frac{b_1}{a_{11}} = \frac{600}{1} = 600$

✓ $\overset{X_1}{R_2} = \frac{b_2}{a_{21}} = \frac{400}{4} = 100$

✓ $\overset{X_1}{R_3} = \frac{b_3}{a_{31}} = \frac{800}{1} = 800$

- Les ratios R_i correspondent à la variable hors base candidate X_2 notés $\overset{X_2}{R_i} = \frac{b_i}{a_{i2}}$, $\left(i = 1,\ldots,3\right)$

✓ $\overset{X_2}{R_1} = \frac{b_1}{a_{12}} = \frac{600}{9} = \frac{200}{3}$

✓ $\overset{X_2}{R_2} = \frac{b_2}{a_{22}} = \frac{400}{1} = 400$

✓ $\overset{X_2}{R_3} = \frac{b_3}{a_{32}} = \frac{800}{3}$

- Les ratios R_i correspondent à la variable hors base candidate X_4 notés $\overset{X_4}{R_i} = \frac{b_i}{a_{i4}}$, $\left(i = 1,\ldots,3\right)$

✓ $\overset{X_4}{R_1} = \frac{b_1}{a_{14}} = \frac{600}{4} = 150$

✓ $\overset{X_4}{R_2} = \frac{b_2}{a_{24}} = \frac{400}{1} = 400$

✓ $\overset{X_4}{R_3} = \frac{b_3}{a_{34}} = \frac{800}{2} = 400$

Les ratios $\overset{X_j}{R_i}$ figurent dans le tableau du simplexe comme suit :

$C_j \rightarrow$		120	120	100	120	00	00	00				
$C_B \downarrow$	$V_B \downarrow$	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3	B	$\overset{X_1}{R_i}$	$\overset{X_2}{R_i}$	$\overset{X_4}{R_i}$
00	S_1	01	09	08	04	01	00	00	600	600	**200/3**	**150**
00	S_2	04	01	03	01	00	01	00	400	**100**	400	400
00	S_3	01	03	02	02	00	00	01	800	800	800/3	400
Z_j		00	00	00	00	00	00	00				
$C_j - Z_j$		120	120	100	120	00	00	00	$Z = 00$			

b. Pour chaque variable hors base candidate X_j on calcule VX_j

VX_j représente la valeur de la variable hors base X_j dans le prochain tableau, si celle-ci est sélectionnée comme variable entrante dans le tableau actuel (premier). Cette valeur égale:

$$VX_j = Min\left(R_i = \frac{b_i}{a_{ij}}\right), \ (j \in V.H.C), \ (i = 1,...,m), \ a_{ij} > 0$$

- $VX_1 = Min\left(\overset{X_1}{R_1} = 600 \ ; \ \overset{X_1}{R_2} = 100 \ ; \ \overset{X_1}{R_3} = 800\right)$

  $VX_1 = 100$ Cela signifie que la valeur qui sera prise par la variable hors base X_1 dans le prochain (deuxième) tableau du simplexe c-à-d. dans la deuxième (prochaine) solution de base réalisable sera 100, si celle-ci est sélectionnée et choisie comme variable entrante dans le tableau du simplexe actuel.
- $VX_2 = Min\left(\overset{X_2}{R_1} = 200/3 \ ; \ \overset{X_2}{R_2} = 400 \ ; \ \overset{X_2}{R_3} = 800/3\right)$

  $VX_2 = 200/3$
- . $VX_4 = Min\left(\overset{X_4}{R_1} = 150 \ ; \ \overset{X_4}{R_2} = 400 \ ; \ \overset{X_4}{R_3} = 400\right)$

  $VX_4 = 150$

Les VX_j figurent dans le tableau du simplexe comme suit :

$C_j \rightarrow$		120	120	100	120	00	00	00				
$C_B \downarrow$	$V_B \downarrow$	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3	B	$\overset{X_1}{R_i}$	$\overset{X_2}{R_i}$	$\overset{X_4}{R_i}$
00	S_1	01	09	08	04	01	00	00	600	600	**200/3**	**150**
00	S_2	04	01	03	01	00	01	00	400	**100**	400	400
00	S_3	01	03	02	02	00	00	01	800	800	800/3	400
Z_j		00	00	00	00	00	00	00				
$C_j - Z_j$		120	120	100	120	00	00	00	$Z = 00$			

VX_j	100	200/3	/	150	/	/	/	

c.

d. Pour chaque variable hors base candidate X_j on calcule VZ_j

$$VZ_j = (C_j - Z_j) \times VX_j$$

VZ_j représente la variation de la fonction objective Z dans le cas ou variable hors base candidate X_j est sélectionnée comme variable entrante dans le tableau actuel. Cette variation égale

- $VZ_1 = (C_1 - Z_1) \times VX_1 = 120 \times 100 = 12000$
  Cela signifie que la variation de la fonction objective Z dans le prochain (deuxième) tableau du simplexe c-à-d. dans la deuxième (prochaine) solution de base réalisable sera de 12000 dans le cas où la variable hors base candidate X_1 est sélectionnée comme variable entrante dans le tableau actuel (premier). Donc la valeur de fonction objective Z dans le prochain (deuxième) sera $Z = 0 + 12000 = 12000$.
- $VZ_2 = (C_2 - Z_2) \times VX_2 = 120 \times \dfrac{200}{3} = 8000$.
- $VZ_4 = (C_4 - Z_4) \times VX_4 = 120 \times 150 = 18000$.

Les VZ_j figurent dans la dernière ligne du tableau du simplexe comme suit:

$C_j \rightarrow$		120	120	100	120	00	00	00				
$C_B \downarrow$	$V_B \downarrow$	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3	B	$\overset{X_1}{R_i}$	$\overset{X_2}{R_i}$	$\overset{X_4}{R_i}$
00	S_1	01	09	08	04	01	00	00	600	600	**200/3**	**150**
00	S_2	04	01	03	01	00	01	00	400	**100**	400	400
00	S_3	01	03	02	02	00	00	01	800	800	800/3	400
Z_j		00	00	00	00	00	00	00				
$C_j - Z_j$		120	120	100	120	00	00	00	$Z = 00$			
VX_j		100	200/3	/	150	/	/	/				
VZ_j		12000	8000		18000							

e. La variable hors base candidate X_j qui sera sélectionnée comme variable entrante est celle qui correspond au VZ_j le plus élevé c-a-d. X_j correspond au $Max\,(VZ_j)$

$$Max\,(VZ_j) = Max\,(\ VZ_1 = 12000\ ;\ VZ_2 = 8000\ ;\ VZ_4 = 18000\ ) = VZ_4 = 18000$$

La variable hors base correspond au $VZ_4 = 18000$ est X_4, Donc c'est cette dernière qui sera sélectionnée comme variable entrante, car elle entraine une variation à la fonction objective Z la plus élevée en la comparant avec les variations entrainées par les variables candidates X_1 et X_2 qui sont respectivement de 12000 et 8000.

- **La variable sortante**

La variable sortante est la variable de base positive qui est sélectionnée pour se transformer en variable hors base nulle. Dans notre exemple est S_1

- **Formulation du deuxième tableau du simplexe**

La formulation du deuxième tableau du simplexe nous permet de lire la deuxième solution de base réalisable

$C_j \rightarrow$		120	120	100	120	00	00	00	
$C_B \downarrow$	$V_B \downarrow$	$X_1 \uparrow$	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3	B
120	X_4	¼	9/4	02	01	1/4	00	00	150
00	$\leftarrow S_2$	**15/4**	-5/4	1	00	-1/4	01	00	250
00	S_3	½	-3/2	-2	00	-1/2	00	01	500
Z_j		30	270	240	120	30	00	00	
$C_j - Z_j$		90	-150	-140	00	-30	00	00	$Z = 18000$

La solution de base réalisable équivalente au deuxième tableau du simplexe est la suivante :

- Variables de base positives : $X_1 = \frac{200}{3}$; $X_4 = \frac{400}{3}$; $S_3 = \frac{1400}{3}$
- Variables hors base nulles : $X_2 = X_3 = S_1 = S_2 = 00$ $X_1 = X_3 = S_2 = 00$
- Valeur de la fonction objective : $Z = 18000$

- **Formulation du deuxième tableau du simplexe**

$C_j \rightarrow$		120	120	100	120	00	00	00	
$C_B \downarrow$	$V_B \downarrow$	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3	B
120	X_4	00	13/6	29/15	01	4/15	-1/15	00	400/3
120	X_1	01	-1/3	4/15	00	-1/15	4/5	00	200/3
00	S_3	00	-4/3	-32/15	00	-7/15	2/15	01	480
Z_j		120	220	264	120	24	88	00	
$C_j - Z_j$		00	-100	-164	00	-24	-88	00	$Z = 24000$

La troisième solution de base réalisable équivalente au troisième tableau du simplexe est la suivante :

- Variables de base positives : $X_1 = 200/3$; $X_4 = 140$; $S_3 = 480$
- Variables hors base nulles : $X_2 = X_3 = S_1 = S_2 = 00$
- Valeur de la fonction objective : $Z = 24000$

- **Test d'optimalité**

Tant-que tous les coefficients $(C_j - Z_j)$ des variables hors base sont négatifs, la solution de base réalisable optimale est atteinte et elle est unique.

5. Résultats et Discussion:

Après avoir présenté par cette étude l'énoncé de la règle relative à la sélection et au choix de la variable entrante lors de la présence de plusieurs variables candidates pour être une variable entrante, un ensemble de résultats peut être présenté. Ces résultats sont énumérés comme suit:

- ✓ Le but principal du critère de la sélection de la variable entrante dont le contenu est que cette dernière est celle ayant le plus grand coefficient $C_j - Z_j$ positif est, d'obtenir et atteindre la solution optimale avec un nombre de tableaux du simplexe moins élevé, soit le moins possible d'améliorations de solutions c-à-d. un nombre d'itérations moins élevées.
- ✓ Même si le contenu de ce critère n'est pas appliqué dans la détermination de la variable entrant, cela n'est pas considéré comme une erreur, mais la solution optimale est atteinte avec un nombre élevé de tableaux du simplexe, c-à-d. après un plus grand nombre d'améliorations.

- ✓ Le critère de choix de la variable entrante, dont le contenu est que cette dernière est celle ayant le plus grand coefficient $C_j - Z_j$ positif, ne garantit pas toujours d'atteindre la solution optimale avec un nombre de tableaux du simplexe moins élevé, et cela est évident dans le cas où il existe plusieurs variables candidates pour être une variable entrante.
- ✓ La règle relative au choix de la variable entrante proposéé par cette étude nous garantit à un taux de 100% d'atteindre la solution optimale avec un nombre de tableaux de simplexe moins élevé.
- ✓ En appliquant la règle proposée par cette étude sur l'exemple ci-dessus, la solution optimale a été obtenue et atteinte à travers trois tableaux du simplexe au lieu de quatre tableaux dans le cas où cette règle proposée n'est pas appliquée.
- ✓ En appliquant la règle proposée par cette étude en économisant les calculs, les efforts et le temps pour atteindre la solution optimale.

6. Conclusion

Ce travail avait pour objectif de présenter et proposer une règle relative à la sélection et au choix de la variable entrante dans le cas de la présence de plusieurs variables candidates pour être choisies et sélectionner comme variable entrante. Cette règle proposée nous empêche de choisir avec une manière aléatoire la variable entrante parmi celles variables candidates. L'énoncé de la règle est, la variable entrante parmi les variables candidates est la variable hors base nulle qui entraine la variation la plus élevée à la fonction économique.

Cette étude est constituée de quatre parties ou sections. La première est consacrée à la définition de la variable entrante et le critère appliqué pour la sélection et le choix de cette dernière. La seconde partie a été intitulé sous forme une question est-ce-que le choix aléatoire de la variable entrante parmi plusieurs variables candidates est suffisant? A la troisième section qui forme le fond et l'objet de cette étude, nous avons présenté et proposer une règle de choix de la variable entrante dans le cas de la présence de plusieurs variables candidates pour être choisies et sélectionner comme variable entrante. Cette dernière nous empêche de choisir la variable entrante avec une manière aléatoire, comme nous avons appliqué cette règle sur un exemple pour vérifier l'efficacité de cette règle. La quatrième et dernière section est consacrée à la discussion des différents résultats obtenus de cette étude.

Cette étude a éffectivement abouti à une règle de la sélection de la variable entrante qui permet de faire face aux situations où il existe plusieurs variables hors base nulles candidates pour être choisies et sélectionner comme variable entrante, c-à-d. on a pu répondre à la problématique cité en introduction de cette étude. Pour cela, nous pouvons donner les recommandations suivantes :

- ✓ Enseignez à nos chères étudiants l'énoncé de cette règle proposée et présenter à travers cette étude.
- ✓ Pour bien comprendre l'interprétation économique de cette règle proposée, enseignez à nos chères étudiants l'interprétation et la signification économique des coefficients C_j, Z_j, $C_j - Z_j$, et a_{ij}.

Les chercheurs intéressés par la programmation linéaire peuvent aborder l'un des axes suivants :

- ✓ Choix de la variable entrante dans le cas on se trouve devant une situation où une variable une variables hors base nulle se transforme à une variable de base positive, et après une ou quelques itérations elle se retransforme à une variable hors base.
- ✓ Choix de la variable sortante dans le cas on se trouve devant une situation où deux variables hors-base sont candidates d'être variables sortante.
- ✓ Proposition d'critère de choix de la variable sortante pour éviter d'être face à une solution de base réalisable dégénérée.

7. Citations:

[1] BAILLARGEON, G. (1995), Outils d'optimisation et d'aide à la décision, les éditions SMG, Canada.
[2] BALAS, E. (1994), Extension de l'algorithme additif à la programmation linéaire et à la programmation non linéaire, édition DUNOD, Paris.
[3] BOULDING. (2004), La programmation linéaire, édition DUNOD, Paris.
[4] DANTZIG, G. B. (1966), Applications et prolongements de la programmation linéaire, édition DUNOD, Paris.
[5] DORFMAN, R. (2005), Application de la programmation linéaire dans l'entreprise, édition DUNOD, Paris.
[6] GERALD, B. (1989), Programmation linéaire appliquée, les éditions SMG, Canada.
[7] PIERE, A. (2010), Recherche opérationnelle de gestion, édition DUNOD, Paris.