Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 9, 2010, pp. 37 - 42

7

Comparabilité et monotonie : Méthodologie pour l'analyse du système M/G/1 avec rappels et feedback

Mohamed BOUALEM

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes (LAMOS)
Université de Béjaïa, Béjaïa 06000, Algérie
Tél. (213) 34 21 51 88

Résumé Dans ce papier, nous nous intéressons à l'application de la méthode de comparaison stochastique pour étudier les propriétés de monotonie et de comparabilité du modèle d'attente avec rappels et feedback. Particulièrement, nous avons montré que la distribution stationnaire du système considéré, est majorée par la distribution stationnaire du système $M/M/1$ avec rappels et feedback, si la distribution des temps de service est NBUE.

Mots clés : Modèles d'attente avec rappels et feedback, monotonie, ordres stochastiques.

7.1 Introduction

La majorité des études sur les systèmes d'attente avec rappels considère le modèle sans feedback. Néanmoins, plusieurs situations réelles peuvent être modélisées comme des systèmes de files d'attente avec rappels et feedback. La notion de Feedback a été initialement introduite par Takacs (1963) pour l'étude de certains systèmes d'attente classiques, et depuis plusieurs papiers sont apparus sur ce sujet en considérant d'autres types de systèmes avec différentes variantes (rappels, vacances, pannes,...).

Le phénomène de feedback dans les systèmes d'attente avec rappels peut apparaître dans plusieurs situations pratiques [1, 2], par exemple, dans les systèmes MATS (Multiple Access Telecommunication Systems) où des messages s'avérant comme erreurs à la destination (messages perdus ou corrompus) sont renvoyés .

En raison de la complexité des modèles d'attente avec rappels, les résultats analytiques sont généralement difficiles à obtenir ou ne sont pas très exploitables du point de vue pratique. Pour résoudre le problème, il existe plusieurs méthodes numériques et d'approximation.

Le but de ce travail est d'appliquer les méthodes de comparaison stochastique pour l'étude du modèle $M/G/1$ avec rappels et feedback.

7.2 Comparaison stochastique

La méthode de comparaison stochastique est un outil mathématique utilisé pour l'étude des performances de certains systèmes modélisés par des chaînes de Markov.
L'idée générale de cette méthode est de borner un système complexe par un nouveau système, plus simple à résoudre et fournissant des bornes qualitatives pour ces mesures de performances. Cette approche est basée sur la théorie des ordres stochastiques **(ordre $\leq_{st}$, ordre $\leq_{v}$, ordre $\leq_{L}$)**. Pour plus de détails, voir [Boualem & Djellab & Aïssani (2009)[3], Muller & Stoyan (2002)[4], Aïssani & Taleb (2010)[5], Schantikumar (1994), Stoyan (1983), Boland & Proshan (1994), Gine et al.(2003) , Mokdad & Castel-Taleb (2008), Theodore & Christian (1999)].

7.3 Description mathématique

On considère un système de files d'attente à un seul serveur où les clients primaires arrivent suivant un flux poissonnien de taux λ. Un client qui arrive et trouve le serveur occupé, quitte l'aire du service pour rejoindre un groupe de clients bloqués appelé *orbite*. Après un certain temps aléatoire, il renouvelle sa tentative d'entrer en service, une fois, deux fois, ..., jusqú'à ce qui'il le trouve disponible. Une fois servi, le client doit décider, soit de rejoindre l'orbite pour un autre service avec une probabilité c $(0 \leq c \leq 1)$ où de quitter le système définitivement avec une probabilité complémentaire $\bar{c}$. Les intervalles de temps inter-rappels suivent une distribution exponentielle de taux θ. Comme cette politique de rappel dépend du nombre de clients dans l'orbite, on l'appelle politique de rappel classique. Les temps de service sont supposés d'une loi arbitraire, de fonction de distribution $B(x)$, de transformée de laplace $\beta(s)$ et de moyenne finie β_1. Toutes les variables aléatoires introduites sont mutuellement indépendantes.
L'état du système à l'instant t peut être décrit par le processus :

$$X(t) = (C(t), N_o(t), \xi(t), t \geq 0), \tag{7.1}$$

où,

$$C(t) = \begin{cases} 0, \text{ si le serveur est oisif} ; \\ 1, \text{ si le serveur est occupé} ; \end{cases} \tag{7.2}$$

$N_o(t)$: le nombre de client en orbite à l'instant t.
Si $C(t) = 1$, $\xi(t)$ représente le temps de service écoulé du client en service.

7.3.1 Chaîne de Markov induite

Soit $\{t_n, n \in \mathbb{N}\}$ une suite d'instants de la complétion d'un service.
La suite de variables aléatoire $Y_n = \{q_n = N(t_n^+), n \in \mathbb{N}\}$ forme une chaîne de Markov induite, dont l'équation fondamentale est

$$q_{n+1} = q_n - \delta_{q_n} + v_{n+1} + \eta, \tag{7.3}$$

où,
v_{n+1} : le nombre de clients qui arrivent pendant un temps de service qui se termine à l'instant t_{n+1}.
Sa distribution est donnée par :

$$K_i = P(v_{n+1} = i) = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^i}{i!} e^{-\lambda x} dB(x). \tag{7.4}$$

δ_{q_n} est la variable de Bernoulli définie par :

$$\delta_{q_n} = \begin{cases} 1, \text{si le } (n+1)^{\text{ème}} \text{ client provient de l'orbite}\,; \\ 0, \text{sinon.} \end{cases}$$

La distribution de δ_{q_n} est donnée par :
$P(\delta_{q_n} = 1/q_n = k) = \frac{k\theta}{\lambda + k\theta}$ et $P(\delta_{q_n} = 0/q_n = k) = \frac{\lambda}{\lambda + k\theta}$.

La variable aléatoire η est définie par
$\eta = \begin{cases} 1, \text{si le client servi décide de rejoindre l'orbite}\,; \\ 0, \text{si le client servi décide de quitter le système.} \end{cases}$
En autre, $P[\eta = 1] = c$ et $P[\eta = 0] = \bar{c}$ $(= 1 - c)$.

Théorème 7.1 *La chaîne de Markov induite est ergodique si et seulement si*

$$\rho = \lambda\beta_1 + c < 1. \tag{7.5}$$

7.3.2 Inégalités préliminaires

On considère deux modèles d'attente $M/G/1$ avec rappels et feedback, de paramètres $\lambda^{(1)}$, $\theta^{(1)}$, $B^{(1)}(x)$ et $\lambda^{(2)}$, $\theta^{(2)}$, $B^{(2)}(x)$ respectivement. Notons par $\{k_n^{(1)}\}$, $\{k_n^{(2)}\}$ les probabilités du nombre de clients arrivant durant une période de service dans chaque système. Les lemmes suivants donnent les conditions, sur les paramètres des deux systèmes, sous lesquelles ces probabilités sont comparables au sens des ordres $\leq_{st}$, $\leq_v$ et $\leq_L$

Lemme 7.1. Si $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$ et $B^{(1)} \leq_{st} B^{(2)}$ alors $\{k_n^{(1)}\} \leq_{st} \{k_n^{(2)}\}$,

Lemme 7.2. Si $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$ et $B^{(1)} \leq_v B^{(2)}$ alors $\{k_n^{(1)}\} \leq_v \{k_n^{(2)}\}$.

Lemme 7.3. Si $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$ et $B^{(1)} \leq_L B^{(2)}$ alors $\{k_n^{(1)}\} \leq_L \{k_n^{(2)}\}$.

7.4 Monotonie de la chaîne de Markov incluse

Pour chaque distribution $\alpha = (\alpha_n)_{n\geq 0}$, on associe à l'opérateur de transition $\mathcal{T}$ de la chaîne de Markov induite une distribution $\mathcal{T}_\alpha = \beta = (\beta_m)_{m\geq 0}$ telle que :

$$\beta_m = \sum_{n\geq 0} \alpha_n p_{nm}. \tag{7.6}$$

Les deux théorèmes suivants donnent la condition sous laquelle l'opérateur de transition $\mathcal{T}$ est monotone par rapport aux ordres stochastique $\leq_{st}$ et convexe $\leq_v$.

Théorème 7.2 *L'opérateur de transition $\mathcal{T}$ est monotone, par rapport à l'ordre stochastique. C'est-à-dire, pour deux distributions quelconques $\alpha^{(1)}$ et $\alpha^{(2)}$, l'inégalité $\alpha^{(1)} \leq_{st} \alpha^{(2)}$ implique la suivante : $\mathcal{T}\alpha^{(1)} \leq_{st} \mathcal{T}\alpha^{(2)}$.*

Théorème 7.3 *L'opérateur $\mathcal{T}$ est monotone, par rapport à $\leq_v$. i.e, pour deux distributions quelconques $\alpha^{(1)}$ et $\alpha^{(2)}$, l'inégalité $\alpha^{(1)} \leq_v \alpha^{(2)}$ implique la suivante : $\mathcal{T}\alpha^{(1)} \leq_v \mathcal{T}\alpha^{(2)}$.*

7.4.1 Comparabilité des opérateurs de transition

Dans cette section, on considère deux modèles d'attente $M/G/1$ avec rappels et feedback, de paramètres $\lambda^{(i)}$, $\theta^{(i)}$, $c^{(i)}$, $B^{(i)}$. Notons par $\mathcal{T}^{(i)}$ l' opérateur de transition associé à la chaîne de Markov incluse dans le $i^{\text{ième}}$ système, $i = 1, 2$.
Les deux théorèmes suivants donnent les conditions de comparabilité de ces opérateurs par rapport aux ordres partiels : $\leq_{st}$ et $\leq_v$.

Théorème 7.4 *Si $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$, $\theta^{(1)} \geq \theta^{(2)}$, $c^{(1)} \leq c^{(2)}$, $B^{(1)} \leq_{st} B^{(2)}$ alors $\mathcal{T}^{(1)} \leq_{st} \mathcal{T}^{(2)}$, i.e. pour une distribution quelconque α, on a $\mathcal{T}^{(1)}\alpha \leq_{st} \mathcal{T}^{(2)}\alpha$.*

Théorème 7.5 *Si $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$, $\theta^{(1)} \geq \theta^{(2)}$, $c^{(1)} \leq c^{(2)}$, $B^{(1)} \leq_v B^{(2)}$ alors $\mathcal{T}^{(1)} \leq_v \mathcal{T}^{(2)}$, i.e. pour une distribution quelconque α, on a $\mathcal{T}^{(1)}\alpha \leq_v \mathcal{T}^{(2)}\alpha$.*

Théorème 7.6 *Si $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$, $\theta^{(1)} \geq \theta^{(2)}$, $c^{(1)} \leq c^{(2)}$, $B^{(1)} \leq_L B^{(2)}$ alors $\mathcal{T}^{(1)} \leq_L \mathcal{T}^{(2)}$.*

7.4.2 Inégalités stochastiques des distributions stationnaires

Soient $\pi_n^{(1)}$, $\pi_n^{(2)}$ les distributions stationnaires du nombre de clients dans chaque système. Les deux théorèmes suivants donnent les conditions de comparabilité des distributions stationnaires du nombre de clients, pour deux systèmes de files d'attente $M/G/1$ avec rappels et feedback, par rapport aux ordres stochastique et convexe.

Théorème 7.7 *Si $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$, $\theta^{(1)} \geq \theta^{(2)}$, $c^{(1)} \leq c^{(2)}$, $B^{(1)} \leq_s B^{(2)}$, alors $\{\pi_n^{(1)}\} \leq_s \{\pi_n^{(2)}\}$, où $\leq_s = \leq_{st}$ (ou $\leq_v$).*

Théorème 7.8 *Si dans le système $M/G/1$ avec rappels et feedback, la distribution de temps de service est $NBUE$, alors $\{\pi_n\} \leq_v \{\pi_n^*\}$ où $\{\pi_n^*\}$ est la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système $M/M/1$ avec rappels et feedback.*

Cas particulier

Si $c = (1 - \bar{c}) = 0$, notre modèle devient le $M/G/1$ avec rappels classique sans feedback. En se basant sur le théorème.7.7, on peut énoncer les deux théorèmes suivants :

Théorème 7.9 *Pour un système $M/G/1$ avec rappels, la distribution π_n est minorée, par rapport à l'ordre convexe, par une distribution dont la fonction génératrice est donnée par :*

$$\pi_n^*(z) = (1-\rho)\exp[\rho(z-1)]\frac{1-z}{\exp[\rho(z-1)]-z} \times \exp\left[\frac{\lambda}{\theta}\int_1^z \frac{1-\exp[\rho(t-1)]}{\exp[\rho(t-1)]-t}dt\right].$$

Théorème 7.10 *Si pour le modèle $M/G/1$ avec rappels, la distribution de temps de service est $NBUE$ (resp. $NWUE$), alors la distribution stationnaire du nombre de clients dans ce système π_n est inférieure (resp. supérieure), par rapport à l'ordre convexe, à la distribution stationnaire, π_n^*, du nombre de clients dans le système $M/M/1$ avec rappels.*
Où :

$$\pi_n^* = \frac{(\rho/\theta)^n}{n!}\prod_{i=0}^{n}(\lambda + i\theta)(1-\rho)^{\frac{\lambda}{\theta}+1}. \tag{7.7}$$

7.5 Conclusion

Dans ce travail, on a trouvé des conditions pour lesquelles l'opérateur de transition de la chaîne de Markov induite du modèle $M/G/1$ avec rappels et feedback est monotone par rapport aux ordres stochastique et convexe.
On a montré aussi que la distribution stationnaire du nombre de clients dans un système $M/G/1$ avec rappels et feedback, est majorée par la distribution stationnaire du nombre de clients dans un système $M/M/1$ avec rappels et feedback, si la distribution des temps de service est $NBUE$.

Pour terminer, nous avons présenté quelques cas particuliers.

Références

1. J.R. Artalejo Accessible bibliography on retrial queues : Progress in 2000-2009 Mathematical and Computer Modelling **51**(9-10) (2010) 1071-1081.

2. J.R. Artalejo, A. Gomez-Corral Retrial queueing system : A computation approach Springer Edition, Berlin, 2008.
3. M. Boualem, N. Djellab , D. Aïssani Stochastic inequalities for $M/G/1$ retrial queues with vacations and constant retrial policy Mathematical and Computer Modelling **50** (2009) 207-212.
4. A. Müller, D. Stoyan Comparison methods for stochastic models and risk John Wiley and Sons, LTD, 2002.
5. S. Taleb, A. Aissani Unreliable $M/G/1$ retrial queue : monotonicity and comparability Queueing Systems **64** (2010) 227-252.