Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 9, 2010, pp. 21 - 24

4

Plongement et placement de certaines classes d'arbres dans l'hypercube

Kamal KABYL et Abdelahafid BERRACHEDI

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes (LAMOS)
Université de Béjaïa, Béjaïa 06000, Algérie
Tél. (213) 34 21 51 88

Résumé Un plongement de $G(V, E)$ dans l'hypercube est défini par la donnée d'une application injective φ de l'ensemble des sommets de G dans l'ensemble des sommets de Q_n, et d'une application P_φ de l'ensemble des arêtes de G dans l'ensemble des arêtes de Q_n, qui associe à chaque arête uv de G une arête $\varphi(u)\ \varphi(v)$ dans Q_n. Un graphe $G = (V, E)$ est dit cubique s'il est plongeable dans Q_n pour un certain n.
On définit dans ce papier des nouvelles classes d'arbres pour lesquelles la dimension cubique est déterminée. On a donné, aussi, le nombre maximum de copies de certaines topologies qu'on peut placer dans un hypercube de dimension donnée.

Mots clés : Plongement, Hypercube, Placement, Arbres.

4.1 Introduction

Un plongement de $G(V, E)$ dans l'hypercube est défini par la donnée d'une application injective φ de l'ensemble des sommets de G dans l'ensemble des sommets de Q_n, et d'une application P_φ de l'ensemble des arêtes de G dans l'ensemble des arêtes de Q_n, qui associe à chaque arête uv de G une arête $\varphi(u)\ \varphi(v)$ dans Q_n. Une classe importante, à étudier, est celle des arbres dans l'hypercube. Cette importance résulte de l'utilisation de ces arbres dans plusieurs domaines, à savoir : informatique, sciences sociales, recherche opérationnelle, optimisation combinatoire, théorie des réseaux électriques, etc. Un graphe $G = (V, E)$ est dit cubique s'il est plongeable dans Q_n pour un certain n.
On définit dans ce papier des nouvelle classes pour lesquelles la dimension cubique est déterminée. On a donné, aussi, le nombre maximum de copies de certaines topologies qu'on peut placer dans un hypercube de dimension donnée.
Un hypercube de dimension n, noté Q_n, est le graphe dont l'ensemble de puisse sommets est le n-uplets binaires et deux sommets sont adjacents, si et seulement, s'ils, diffèrent en une seule coordonnée.
La Cn-valuation, aux cas des arbres, est donnée comme suit : Un arbre T est Cn- valué si les arêtes de T sont marquées par les entiers de l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ de sorte que

pour toute chaîne P de T, il existe un entier $K \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ pour lequel un nombre impair d'arêtes de P est marquées par K. I. Havel et moravek [7] ont montré qu'un graphe G est plongeable dans Q_n, si et seulement, s'il existe une Cn-valuation de G.

4.2 Plongement et placement de certaines classes d'arbres

4.2.1 La classe AD_n

Pour $n \geq 1$, l'arbre AD_n est obtenu à partir de l'arbre binaire D_n en reliant un seul sommet de degré 1 à un nouveau sommet. AD_n possède donc 2^{n+1} sommets.
AD_3 est montré sur la figure suivante :

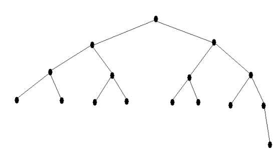

FIGURE 4.1.

Théorème 4.1 *Pour tout* $n \geq 3$, $dim(AD_n) = n + 1$.

4.2.2 La classe $A\widehat{D}_n$

Pour $n \geq 1$ l'arbre, $A\widehat{D}_n$ est obtenu à partir de deux copies disjointes de AD_n, en reliant les racines par une arête. AD_2 est donné par le graphe suivant :

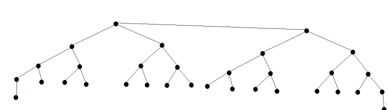

FIGURE 4.2.

Théorème 4.2 *L'arbre* $A\widehat{D}_n$ *est plongeable dans* Q_{n+2} *et* $dim(A\widehat{D}_n) = n + 2$

On peut parler d'un autre plongement, concernant ce type d'arbre, qui nécessite de trouver combien d'arbre de même topologie qu'on puisse plonger dans un hypercube de dimension donnée.

On peut faire une généralisation comme suit :
pour n=1, l'arbre $A\widehat{D}_1$ est montré sur la figure suivante :

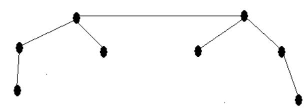

Figure 4.3.

Pour $k \geq 2$, l'arbre $A^k\widehat{D}_1$ est obtenu en reliant deux copies de $A^{k-1}\widehat{D}_1$ et un sommet de degré 3 de $A^{k-1}\widehat{D}_1$ à un sommet de degré 3 de $A^{k-1}\widehat{D}_1$ par une arête.

Proposition 1. *Le nombre maximum de copies de l'arbre $A\widehat{D}_1$, qu'on puisse placer dans un hypercube de dimension n est 2^{n-3}.*

4.2.3 La classe $\boldsymbol{AB_n}$

Pour $n \geq 1$, l'arbre AB_n est obtenu de la manière suivante :
AB_1 est le graphe de la figure suivante :

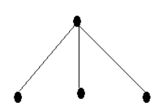

Figure 4.4.

Pour $n \geq 2$, AB_n est obtenu en reliant deux copies disjointes de AB_{n-1}, tel qu'un sommet de degré $n+1$ de la première copie est relié par une arête à un sommet de degré $n+1$ de la deuxième copie.
AB_2 est montré sur la figure suivante :

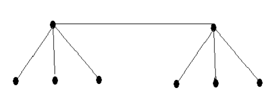

Figure 4.5.

On peut parler d'un autre plongement, concernant ce type d'arbre, qui nécessite de trouver combien d'arbre de même topologie qu'on puisse plonger dans un hypercube de dimension donnée.

Proposition 2. *Le nombre maximum de copies de AB_1, qu'on puisse placer dans un hypercube de dimension n, est 2^{n-2}.*

Pour la démonstration, il suffit d'utiliser la récurrence sur n.

Références

1. Arfati, J. Papadimitriou, C.H. and Papageorgiou, P. : The complexity of cubical graphs. proceedings of 11 th international Kolloquium on automata , languages and programming. (1984) 51-57.
2. Berrachedi, A. : Sur la dimension cubique de quelques classes d'arbres. Actes du Colloque Cosi'04, Colloque sur L'optimisation et les Systèmes d'Information. Université de Tizi-Ouzou.
3. Bezrukov, S. and Monien, B. Unger, W. and Wechsung, G. : Embedding ladders and caterpillars into hypercube. discrete applied mathematics , **83** (1992) 21-29.
4. Corneil, D.G. and Wagner, A. : Embeding trees in a hypercube is NP- complet. siam j. comput **19** (1990),570-590
5. Havel, I. : On hamiltonian circuits and spanning trees of hypercubes. Cas prest. Mat **109** (1984) 135-152.
6. Havel, I. and Liebel, P. : One legged caterpillars spans hypercubes. Journal of graph theory. **10** (1986) 69-77
7. Havel, I. and Moravek, J. : B-valuation of graphs . Czech- Math .jour ., **22** (1972),338-351.
8. Firsov, V. : On isometric embeddings of graph into a boolean cube. cyber - netics 1, (1965) 112-113.
9. Harary, F. Lewinter, M. and Widolski, W. : On two legged caterpillars which span a hypercube. Congr. Numer. **66** (1988) 103-108.
10. Kabyl, k. : Dimension cubique de deux nouvelles classes d'arbres. Actes du Colloque Cosi'05, Colloque sur L'optimisation et les Systèmes d'Information. Université de Béjaia.
11. kobeissi, M. and Mollard, M . : Spanning graphs of hypercubes starlike and double starlike trees. Accepté à discrete Math.
12. Labord, J.M. and Rao hebbar, S.P. : Another characterization of hypercube . discrete Math., **39** , (1982) 161-166.
13. Nebesky, L. : Embedding m-quasistars into n-cubes. C zechoslovak mathematical, journal, praha,38 (113),1988.
14. Nekri, M. and Berrachedi, A. : Two new classes of Trees Embeddable into hypercubes. RAIRO Oper. Res., **38**, (2004) 295–303.