*Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)*
*Volume 9, 2010, pp. 9 - 14*

# 2

# Sur la théorie des jeux évolutionnaire Multicritère

Fatiha BARACHE

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes (LAMOS)
Université de Béjaïa, Béjaïa 06000, Algérie
**Tél.** (213) 34 21 51 88

**Résumé** Dans la théorie des jeux évolutionnaires, chacun des individus de la population cherche à maximiser son propre objectif. Cette approche n'est souvent pas suffisante pour décrire les objectifs et le comportement conflictuels des individus. On a défini la notion de stabilité évolutionnaire (ESS) multicritère, qui permettra de modéliser une classe plus large des problèmes d'interaction. Les concepts de solutions proposés sont le réplicateur dynamique et l'équilibre de Nash Pareto.

**Mots clés :** Théorie des jeux évolutionnaires, stratégie évolutionnairement stable (ESS) Multicritère, Stabilité évolutionnaire, réplication de dynamique, Equilibre de Nash Pareto.

## 2.1 Introduction

La théorie des jeux évolutionnaire (TJE) s'est développée à la suite des travaux du biologiste John Maynard Smith [1]. La TJE a connu un très grand intérêt ses dernières années notamment dans les sciences économiques et sociales, son champs d'application s'élargie aux réseaux de télécommunication, aux réseaux de transport, etc. La théorie des jeux classique impose un degré de rationalité très élevé sur les individus. Par contre, la théorie des jeux évolutionnaire permet de prédire et de décrire les choix des différents individus lorsqu'on est en face d'une hypothèse de rationalité plus faible [4].

Le concept d'équilibre, décrit dans les TJE, est le concept de stratégie évolutionnairement stable (ESS) qui est un raffinement de l'équilibre de Nash [4]. Pour qu'une stratégie soit un équilibre de Nash, il faut qu'un seul joueur ne puisse pas tirer profit d'un changement de stratégie. Dans l'équilibre de Nash, si plusieurs joueurs changent leurs décisions, il se peut bien qu'ils en tirent un gain. Or, la notion de ESS est plus robuste en permettant à toute une fraction de la population de changer leurs décisions [1,3].

L'approche qui consiste à considérer un seul critère ou objectif qu'un individu souhaite maximiser, n'est souvent pas suffisante pour décrire les besoins et le comportement des individus. Kiran Somasundaram [2] étend la notion de stabilité évolutionnaire aux jeux avec fonctions de paiement vectorielles [5]. Il espère que cette notion de stabilité évolutionnaire multicritère, permettra de modéliser une classe plus large des problèmes d'interaction.

Comme dans les jeux à un seul objectif, il se focalise sur les interactions par paires symétriques dans une large population. On ne compromet pas les interactions entre plus que deux individus à un instant.

## 2.2 Notation

On considère les mêmes hypothèses qu'on a posé dans la section précédante. On a le jeu

$$\langle I,\ S,\ U\rangle. \tag{2.1}$$

- I : population d'individus (joueurs). $S$ : l'ensemble des issues du jeu en stratégies pures. $\Delta$ : l'ensemble des stratégies mixtes, tel que $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n_+,\quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$.
- $U$ : on associe à chaque joueur une sequence de matrices des gains. Supposons qu'il y a $l$ critères (objectifs) en jeux. Pour le joueur I on lui associe les matrices des gains suivantes $A_1, A_2, \ldots, A_l$ avec
  $A_i$ : la matrice des gains du joueur I en considérant le critère $i$.
  $B_i = A_i^{'}$ :la matrice des gains du joueur II en considérant le critère $i$.
  La fonction de gain quand le joueur I joue la stratégie $x \in \Delta$ et le joueur II joue la stratégie $y \in \Delta$ est donnée par

$$U(x,y) = (u^1, u^2, \ldots, u^l)(x,y) = (u^1(x,y), u^2(x,y), \ldots, u^l(x,y)) = (x'A_1y, x'A_2y, \ldots, x'A_ly)$$

**Remarque 2.1**

- *Les équilibres Pareto Nash symmétrique sont notés par* $\Delta^{PNE}$.
- *L'ensemble des meilleures réponses Pareto pour une stratégie* $y$ *est noté par* $\beta^{P*}(y)$.

Les différentes relations de classement $\succ$ de $\mathbb{R}^l$, que nous considérions, sont indiquées dans le tableau suivant.

| Notation | Définition | Nom |
|---|---|---|
| $x \gg y$ | $x_i > y_i, \quad i = 1,2,\ldots,l$ | Strict component-wise order |
| $x > y$ | $x_i \geq y_i, \quad i = 1,2,\ldots,l$ et $x \neq y$ | Component-wise order |
| $x >_{\text{lex}} y$ | $x_j > y_j, \quad j = \min\{i, x_i \neq y_i\} \quad j \leq l$ | Lexicographic component-wise order |
| $x_\lambda > y_\lambda$ | $\lambda' x > \lambda' y, \quad \lambda \geq 0$ | $\lambda$-scalarized order |

## 2.3 Stabilité évolutionnaire

**Définition 2.1** *Une stratégie* $x \in \Delta$ *est dite évolutionnairement stable (en respectant la relation de classement ou d'ordre* $\succ$*), si* $\forall y \in \Delta$, $y \neq x$, $\exists\ \varepsilon_y$ *tel que* $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_y)$, *on a* $U(x, \varepsilon y + (1-\varepsilon)x) \succ U(y, \varepsilon y + (1-\varepsilon)x)$.

**Remarque 2.2** *Les différentes relations de classements donnent lieu à plusieurs définitions de la stabilité évolutionnaire dans le cadre multi-objectifs.*

### 2.3.1 Stabilité évolutionnaire fortement idéale

Quand on choisit la relation d'ordre "strict component-wise", nous obtenons la stabilité évolutionnaire idéalement forte. La séquence de composants de jeux symétriques est donnée par les matrices de paiement $A_m$, $B_m = A'_m 1 \leq m \leq l$ qui correspondent aux matrices dans le jeu multi-objectifs original. On note $G^c_m$, $1 \leq m \leq l$ : un jeu symmetrique en considérant la $m^{\text{ème}}$ composante. $\langle I, S, u^m \rangle$. $\beta^{m*}(y)$ : les meilleures réponses correspondantes pour le jeu $G^c_m$. $\Delta^{NE(G^c_m)}$ : l'ensemble des équilibres de Nash symétrique pour le jeu $G^c_m$. $\Delta^{ESS(G^c_m)}$ : l'ensemble des équilibres évolutionnairement stables pour le jeu $G^c_m$. $\Delta^{SIESS}$ : l'ensemble des stratégies évolutionnairement stables fortement idéales.

**Définition 2.2** *Une stratégie* $x \in \Delta$ *est dite évolutionnairement stable (en respectant la relation de classement ou d'ordre* $\succ$*), si* $\forall y \in \Delta$, $y \neq x$, $\exists\ \varepsilon_y$ *tel que* $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_y)$, *on a* $U(x, \varepsilon y + (1-\varepsilon)x) >> U(y, \varepsilon y + (1-\varepsilon)x)$.

**Proposition 1** $\Delta^{SIESS} = \bigcap_m \Delta^{ESS(G^c_m)}$.

### 2.3.2 Stabilité évolutionnaire idéale

Quand on choisit la relation d'ordre "component-wise", nous obtenons la stabilité évolutionnaire idéale. On considère $G^c_m$, $1 \leq m \leq l$. On note $\Delta^{IESS}$ : l'ensemble des stratégies évolutionnairement stables idéales.

**Définition 2.3** *Une stratégie* $x \in \Delta$ *est dite évolutionnairement stable (en respectant la relation de classement ou d'ordre* $\succ$*), si* $\forall y \in \Delta$, $y \neq x$, $\exists\ \varepsilon_y$ *tel que* $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_y)$, *on a* $U(x, \varepsilon y + (1-\varepsilon)x) \geq U(y, \varepsilon y + (1-\varepsilon)x)$.

**Proposition 2** $\Delta^{IESS} = \{x \in \bigcap_m \Delta^{NE(G^c_m)} | U(x, y) > U(y, y), \forall y \in \bigcap_m \beta^{*m}(x), y \neq x\}$.

### 2.3.3 Stabilité évolutionnaire lexicographique

Quand on choisit la relation d'ordre " Lexicographic component-wise", nous obtenons la stabilité évolutionnaire lexicographique. On considère $G^c_m$, $1 \leq m \leq l$. On note $\Delta^{LESS}$ : l'ensemble des stratégies évolutionnairement stables lexicographiques.

**Définition 2.4** *Une stratégie $x \in \Delta$ est dite évolutionnairement stable (en respectant la relation de classement ou d'ordre $\succ$), si $\forall y \in \Delta$, $y \neq x$, $\exists\ \varepsilon_y$ tel que $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_y)$, on a $U(x, \varepsilon y + (1-\varepsilon)x) >_{lex} U(y, \varepsilon y + (1-\varepsilon)x)$.*

**Proposition 3** $\Delta^{LESS} = \{x \in \bigcap_m^j \Delta^{NE(G^c_m)} \quad | \quad u^1(x,y) \geq u^1(y,y), \ldots, u^{j-1}(x,y) \geq u^{j-1}(y,y), u^j(x,y) > u^j(y,y), \quad \forall y \in \bigcap_m^j \beta^{*m}(x), \quad y \neq x\}$.

### 2.3.4 Stabilité évolutionnaire Biaisée

Quand on choisit la relation d'ordre " $\lambda$-scalarized order ", nous obtenons la stabilité évolutionnaire Biaisée. On considère le jeu scalarisé $G(\lambda)$. On note $\Delta^{BESS}$ : l'ensemble des stratégies évolutionnairement stables biaisées. $\lambda' U(x,y)$ : la fonction de gain dans le jeu $G(\lambda)$, $x \in \Delta, y \in \Delta$.

**Proposition 4** $\Delta^{BESS} = \{x \in \Delta^{PNE(G)} \ \ | \ \ y \neq x, y \in \beta^{*P}(x)$,
$\Rightarrow$ *$x$ domine $y$ comme réponse à la stratégie opposant $y$*$\}$.

## 2.4 Replicateur Dynamique

On considère que les individus sont programmés à jouer un jeu symétrique à deux joueurs multicritères avec une fonction de gain $U$. $p_i(t)$ le nombre d'individus qui sont programmés à jouer la stratégie pures $s_i \in X$ à l'instant $t$. $p(t) = \sum_i^n p_i(t) > 0$ la population totale. $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_k(t))$ est l'état de la population. $x_i(t)$ est la proportion des individus qui sont programmés à jouer la stratégie pure $s_i$ à l'instant $t$ : $x_i(t) = p_i(t)/p(t)$. $x(t) \in \Delta$. $U(e^i, x)$ : est le gain espéré quand la stratégie pure $s_i$ est jouée contre le profil de stratégie $x$. $U(x,x)$ : est le gain espéré quand le profil de stratégie $x$ est joué dans la population (le gain moyen dans la population avec la stratégie $x$). $U(x,x) = \sum_{i=1}^n x_i U(e^i, x)$. $\dot{x}_i$ : est la proportion d'individus qui joueront la stratégie pure $s_i$ à la prochaine génération.

La dynamique de la population correspondante est :

$$\dot{x}_i = x_i[U(e^i, x_{-i}) - U(x,x)] \tag{2.2}$$

On suppose que les fonctions gains son biaisées par $\lambda$ qui reflète l'importance de chaque fonction. Le gain moyen devient : $\lambda' U(x,x)$. $\beta$ : le taux de naissance (taux de croissance) dans la population. $\delta$ : le taux de mort dans la population. La dynamique de la population devient : $\dot{p}_i = [\beta + \lambda' U(e^i, x) - \delta] p_i$. La dynamique correspondante à $x_i$ est :

$$\dot{x}_i = [\lambda' U(e^i, x) - \lambda' U(x,x)] x_i \qquad \ldots \qquad BRE(\lambda) \tag{2.3}$$

$BRE(\lambda)$ : le replicateur dynamique biaisé.

**Remarque 2.3** *Cette dynamique correspond aux jeux où tous les joueurs choisissent les mêmes poids pour les différents objectifs de leurs vecteurs fonction gain.*

### 2.4.1 Equilibre de Nash Pareto

L'ensemble des équilibres de Nash Pareto pour un vecteur de fonction de gain du jeu symmétrique à deux joueurs est donné par :

**Définition 2.5** $\Delta^{PNE} = \{x \in \Delta \ \mid \ x = arg \overset{P}{\max_{z \in \Delta}} U(z,x)\}$.

On note $\mathcal{U}(z,x)$ l'espace de décisions pour le joueur I quand le joueur II joue la stratégie $x \in \Delta$. Dans un programme linéaire multicritères, $\mathcal{U}$ représente un polyhèdre convexe avec des sommets dans $U(e^i,x), i = 1 \ldots n$.

**Lemme 2.1.**
$\Delta^{PNE} = \{x \in \Delta \mid \lambda' U(e^i,x) - \lambda' U(x,x) i \in C(x)$ et $U(e^i,x) \in$ face Pareto Dominante de $\mathcal{U}\}$.

### 2.4.2 Etats stationnaires

Les états stationnaires donnés par la dynamique $BRE(\lambda)$ sont comme suit :

**Définition 2.6** $\overset{\circ}{\Delta}(\lambda) = \{x \in \Delta \ \mid \ \lambda' U(e^i,x) = \lambda' U(x,x)\}$.

On note l'ensemble des états stationnaires intérieurs de $BRE(\lambda)$ par $\overset{\circ\circ}{\Delta}(\lambda) = \overset{\circ}{\Delta}(\lambda) \bigcap \mathrm{int}(\Delta)$.

**Proposition 5** $\{e^1, e^2, \ldots, e^n\} \bigcup \Delta^{PNE}(\lambda) \subset \overset{\circ}{\Delta}(\lambda)$.

$$\overset{\circ\circ}{\Delta}(\lambda) = \Delta^{PNE}(\lambda) \bigcap int(\Delta).$$

**Proposition 6** *Si $x \in \Delta^{BESS}$ alors $BRE(\lambda)$ est asymptotiquement stable.*

## 2.5 References

1. Price G.R. Smith M. *The logic of animal conflit.* Nature. 246 15 :18, 1973.
2. Somasundaram K. *Evolutionary Stability in Multi-Objective Games*. The Institute for systems research. 2009.
3. Taylor P.D. Joncker L.B. *Evolutionary stable strategies and game dynamics*. Mathematical biosciences, Elsevier. 40 : 145-156, 1978.
4. Weibull J.W. *Evolutionary Games Theory*. MIT Press, 1997.
5. Zenely M. *Games with multiple payoffs*. International Journal of Game Theory. 4(4) : 179-191, 1975.