Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 9, 2010, pp. 3 - 7

1

Programmation bi-niveaux : application dans le domaine de transport

Aicha ANZI et Mohammed Said RADJEF

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes (LAMOS)
Université de Béjaïa, Béjaïa 06000, Algérie
Tél. (213) 34 21 51 88

Résumé L'optimisation bi-niveaux est une branche des mathématiques qui trouve des applications dans plusieurs domaines. Dans cette communication, nous allons nous focaliser sur le domaine des transports et particulièrement dans le problème de tarification routière.

Mots clés : optimisation bi-niveaux, transport, tarification.

1.1 Introduction

Le problème de programmation bi-niveaux est un problème d'optimisation hiérarchique, avec deux niveaux de décision. Le premier niveau est appelé Leader et le deuxième Suiveur. En d'autres termes, un programme bi-niveau est un programme mathématique standard avec y est contraint d'être solution optimale pour le programme

$$\max\{f(x,y) : g(x,y) \leq 0\} \tag{1.1}$$

Ce qui donne le programme bi-niveau suivant :

$$\begin{aligned} \max_x \; & F(x,y) \\ s.c. \quad & G(x,y) \leq 0 \\ & \max_y f(x,y) \\ & \quad s.c. \quad g(x,y) \leq 0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

En se basant sur le programme bi-niveau (1.2), on donne les notations et définitions suivantes :

a. *Ensemble des contraintes du problème*

$$S = \{(x,y) : \; G(x,y) \leq 0, \;\; g(x,y) \leq 0\} .$$

b. *Ensemble réalisable du Suiveur pour un x fixé*

$$S(x) = \{y : g(x, y) \leq 0\}.$$

c. *Projection de S sur l'espace du Leader*

$$P(X) = \{x : \exists y, (x, y) \in S\}.$$

d. *Ensemble des réactions rationnelles du Suiveur pour $x \in P(X)$*

$$R(x) = \{y : y = \arg\max[f(x, \hat{y}) : \hat{y} \in S(x)]\}.$$

e. *Région induite*

$$RI = \{(x, y) \in S, y \in R(x)\}.$$

La région induite RI représente l'ensemble réalisable du problème (1.2) sur lequel le Leader optimise sa fonction de gain. Cette région est non convexe et souvent discontinue, ce qui rend les problèmes bi-niveaux non convexes et difficiles à résoudre. Ces caractéristiques restent vraies même dans le cas où toutes les fonctions dans (1.2) sont linéaires et dans le cas d'absence des contraintes $G(x, y) \leq 0$.

1.2 Domaines d'application de la programmation bi-niveau

Les applications de la programmation bi-niveau sont nombreuses et variées, par exemple dans le domaine de production, dans le secteur de l'énergie, en finances, en contrôle de pollution, ...etc.

Dans le domaine de transport aussi la programmation bi-niveau a été appliquée pour résoudre les problèmes de tarification optimale, par exemple, le problème de tarification routière (détermination des péages).

1.2.1 Tarification optimale dans un système de péages routiers

Définition du péage : c'est un droit que l'on paie pour emprunter une autoroute, un pont, etc.

Position du problème :

le problème est de déterminer de façon optimale les péages sur un tronçon d'un réseau routier en tenant compte des réactions des usagers du réseau. L'objectif de cette opération peut être la réduction de la congestion ou la maximisation d'un revenu. Nous avons donc deux niveaux de décisions : le premier niveau ou Leader représenté par le gestionnaire du réseau, et le deuxième niveau ou Suiveur représenté par les usagers.
Dans le cas de péage pour la maximisation du revenu, nous avons le scénario suivant :

– Le gestionnaire du système d'autoroutes est autorisés à mettre en uvre un système de **péage** sur un ensemble (ou un sous ensemble) d'un réseau routier.
– L'objectif du gestionnaire du réseau est de maximiser son revenu.
– Les usagers souhaitent minimiser leur coût de voyage.
– Un plan de péage optimal est tel que les coûts de péage ne sont pas trop élevé, sinon les usager se détourneront de l'utilisation des arcs à péage.
– Une fois le gestionnaire du réseau a fixé les péages, la réaction des usagers consiste à choisir leurs itinéraires de manière à minimiser le coût total d'un voyage (distance, temps, etc) plus le péage.

Formulation mathématique du problème de péage :
Désignons par $\mathcal{A}$ l'ensemble des arcs (routes) du réseau et par $\bar{\mathcal{A}}$ le sous ensemble des arcs à péages. Le problème du Leader est donné par le programme mathématique :

$$\begin{aligned} &\max_{T,x} \sum_{a\in\bar{\mathcal{A}}} T_a x_a \\ &\quad l_a \leq T_a \leq u_a,\ \forall a \in \bar{\mathcal{A}}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

où

– T_a et x_a désignent le péage et le flot sur l'arc a respectivement, et
– l_a (respectivement u_a) est la borne inférieure (respectivement supérieure) sur le péage.

Les usagers cherchent à minimiser les coûts totaux de leurs voyages. Le modèle mathématique est donné par le programme linéaire :

$$\begin{aligned}
&\min_{f,x} \sum_{a\in\mathcal{A}} c_a x_a + \sum_{a\in\bar{\mathcal{A}}} T_a x_a \\
&\quad \sum_{p\in P_{rs}} f_p^{rs} = d_{rs},\ \forall\ (r,s)\in\Theta, \\
&\quad x_a = \sum_{(r,s)\in\Theta} \sum_{p\in P_{rs}} \delta_{a,p}^{rs} f_p^{rs},\ \forall a\in\mathcal{A}, \\
&\quad f_p^{rs} \geq 0\ \forall p\in P_{rs},\ \forall\ (r,s)\in\Theta.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

- La fonction objectif est la somme des coûts qui résultent des péages T_a ($a \in \bar{\mathcal{A}}$) et les autres coûts (durée, distance, etc.) qui sont agrégés dans le vecteur c_a.
- La première contrainte exprime la satisfaction de la demande sur le voyage, d_{rs}, d'une origine r vers la destination s.
- La deuxième contrainte exprime le fait que le flot sur un arc a est égale à la somme des flots sur tous les chemins utilisant cet arc, avec

$$\delta_{a,p}^{rs} = \begin{cases} 1 \text{ si le chemin } p\in P_{rs} \text{ passe par l'arc } a, \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \tag{1.5}$$

Donc il existe une relation entre les problèmes (1.3) et (1.4)

- puisqu'ils utilisent le même ensemble de variables, à savoir, les vecteurs de péage T_a et les flots x_a.
- de même la fonction objectif du gestionnaire ne peut être évaluée tant que les flots ne sont pas connus (ces derniers ne sont pas contrôlés directement par le gestionnaire, mais solution du programme correspondant au problème des usagers).

Ce qui nous donne la formulation bi-niveau :

$$\begin{aligned}
&\max_{T,x} \sum_{a\in\bar{\mathcal{A}}} T_a x_a \\
&\quad l_a \leq T_a \leq u_a,\ \forall a\in\bar{\mathcal{A}}, \\
&\quad \min_{f,x} \sum_{a\in\mathcal{A}} c_a x_a + \sum_{a\in\bar{\mathcal{A}}} T_a x_a \\
&\quad\quad \sum_{p\in P_{rs}} f_p^{rs} = d_{rs},\ \forall\ (r,s)\in\Theta, \\
&\quad\quad x_a = \sum_{(r,s)\in\Theta} \sum_{p\in P_{rs}} \delta_{a,p}^{rs} f_p^{rs},\ \forall a\in\mathcal{A}, \\
&\quad\quad f_p^{rs} \geq 0\ \forall p\in P_{rs},\ \forall\ (r,s)\in\Theta.
\end{aligned}$$

1.2.2 Autres applications

Les applications de la programmation bi-niveau dans le domaine de transport ne se limitent pas à cet exemple.

- Le problème de tarification dans le transport public.
- Le problème de tarification pour le transport de marchandises.
- Le problème d'évaluation des prix des billets dans le transport aérien.

Références

1. J.F. Bard : Practical bilevel optimization : algorithms and applications. Kluwer academic publishers, Dordrecht (1998)
2. B. Colson, P. Marcotte and G. Savard : Bilevel programming : A survey. 4OR A Quarterly, J. Oper. Res., (2007)
3. S. Dempe : Foundations of Bilevel Programming. Kluwer academic publishers, Dordrecht (2000)
4. J.B.E. Etoa : Optimisation hiérarchique : théorie, algorithmes et applications. Publibook, France, (2008)