Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 6, 2008, pp. 25 - 28

5

Nouvelle technique de plongement de graphes dans l'hybercube

Kamel KABYL and Abdelhafid BERRACHEDI

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes (LAMOS)
Université de Béjaïa, Béjaïa 06000, Algérie
Tél. (213) 34 21 51 88

Résumé L'hypercube étant une structure dont la topologie est utilisée en informatique(parallèlisme, réseaux), il est fondamentale de déterminer quels sont les graphes et particuliérement les arbres qui sont plongeables dans l'hypercube c'est-á-dire qui sont sous-graphes de l'hypercube. Ce problème trés étudié est toujours ouvert et on ne connaît que des résultats partiels pour certaines familles d'arbres. Dans ce travail nous avons introduit une application qui permet de déterminer la dimension minimale de certaines classes d'arbres.

Mots-clés : Hypercube, Plongement, Graphes, Arbres, Isomorphisme.

5.1 Introduction

Un plongement de $G(V, E)$ dans l'hypercube est défini par la donnée d'une application injective φ de l'ensemble des sommets de G dans l'ensemble des sommets de Q_n, et d'une application P_φ de l'ensemble des arêtes de G dans l'ensemble des arêtes de Q_n, qui associe à chaque arête uv de G une arête
$\varphi(u)\ \varphi(v)$ dans Q_n. D'une manière générale, l'étude d'un plongement de graphe G dans l'hypercube revient à voir si G est isomorphe à un sous graphe de Q_n. Arfati, Papadimitriou et Papageorgiou [1] ont montré le résultat suivant : Le problème de décider si un graphe G est plongeable dans Q_n est $N.P$-complet. Wagner et Corneil [2] ont montré que ce problème reste N.P complet même dans le cas où G est un arbre. Un hypercube de dimension n, noté Q_n, est le graphe dont l'ensemble de sommets sont les n-uplets binaires et deux sommets sont adjacents si et seulement s'ils différent en une seule coordonnée.
Un graphe biparti $G(X \cup Y; E)$ est dit équilibré si $Card(X) = Card(Y)$. L'hypercube Q_n est un graphe biparti équilibré, n-régulier ayant 2^n sommets et $n.2^{n-1}$ arêtes.
Comme conditions nécessaires de plongement de graphe dans Q_n on a : pour qu'un graphe G soit plongeable dans Q_n il faut que : $|V(G)| \leq 2^n$, G est biparti et le degré maximum de (G), $\Delta(G) \leq n$. Si de plus $|V(G)| = 2^n$ alors G doit être équilibré. Toutes ces conditions sont nécessaires pour un graphe G plongeable dans Q_n, mais ne sont pas suffisantes.

La Cn-valuation aux cas des arbres est donnée comme suit : Un arbre T est Cn-valué si les arêtes de T sont marquées par les entiers de l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ de sorte que pour toute chaîne P de T, il existe un entier $K \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ pour lequel un nombre impair d'arêtes de P sont marquées par K. I. Havel et Moravek [5] ont montré qu'un graphe G est plongeable dans Q_n si et seulement s'il existe une Cn-valuation de G.

5.2 Nouvelle technique du plongement

5.2.1 Opération γ

Soit ζ l'ensemble des arbres binaires, on définit l'opération γ dans ζ de la manière suivante :
$\forall\ T_1,\ T_2 \in \zeta,\ \gamma(T_1, T_2) = T$ avec T est un arbre obtenu en reliant un sommet de T_1 á un sommet de T_2 par une arête.

Theorem 1. *Tout arbre T obtenu par l'application γ est de dimension cubique inférieure ou égale á Max $(dim(T_1), dim(T_2)) + 1$.*

Remark 1. Si on ne connaît pas dim(T_1), et dim(T_2) on fait de la même manière pour T_1 et T_2 c'est-à-dire : $T_1 = \gamma(T_1', T_2')$ avec dim(T_1) $\leq Max(dim(T_1'), dim(T_2')) + 1$ même chose pour T_2 et ainsi de suite.

Démonstration. Supposons qu'on connaît dim(T_1) et dim(T_2) et que Max$(dim(T_1), dim(T_2)) = dim(T_1) = n$, donc $|T_1| \leq 2^{dim(T_1)}$ et que $|T_2| \leq 2^{dim(T_2)}$, alors si on marque l'arête qui joint T_1 á T_2 par n+1 on obtient une $C_n + 1$ valuation de T et comme $|T| \leq |T_1| + |T_2| \leq 2^n + 1$, d'où dim($T$) $\leq n + 1$, dans le cas où on ne cannaît pas dim(T_1) et dim(T_2) on utilise la remarque précedente.

5.2.2 Exemples

1. Considérons les arbres suivants :

a) L'arbre T_1 est donné par la figure suivante :

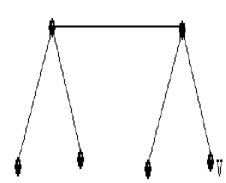

Figure 5.1.

b) L'arbre T_2 est donné par la figure suivante :

Par l'opération γ, si on relie le sommet u au sommet v par une arête, on obtient l'arbre Tde la figure suivante :

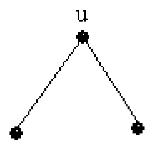

Figure 5.2.

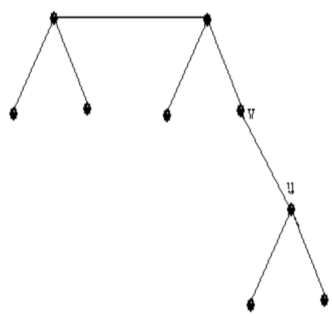

Figure 5.3.

Il est claire que dim(T_1)=3 et dim(T_2)=2, alors d'après le thérème précedant on trouve dim(T)$\leq$ max(3 ;2)+1 c'est á dire dim(T)$\leq$ 4, et ce résutat on peut le verifier facilement sur le l'arbre T, en marquant l'arête reliant u à v par 4, et comme le nombre de sommet de T est égale à 9 qui est supérieur á 2^3 alors T ne peut pas être plongeable dans Q_3, D'où Dim(T)= 4.

2. Prenons $T_1 = R_n$ et $T_2 = R_n$ et T l'arbre obtenu par l'application γ en reliant un sommet pendant de T_1 à un sommet pendant de T_2 par une arête. D'après le théorème précedent dim (T) est inférieure ou égale á max(dim(T_1), (T_2))+1 = n+3. comme l'arbre T a $|T_1|+|T_2| = |R_n|+|R_n| = 2^{n+2}+2$ sommets donc ne peut pas étre plongeable dans Q_{n+2} car le nombre de sommets de T est supérieur au nombre de sommet de Q_{n+2} d'où dim(T)= n+3. Pour n=2 l'arbre T est montré dans la figure suivante :

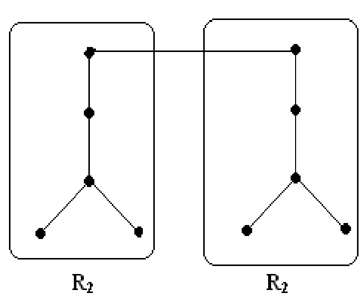

Figure 5.4.

5.3 Conclusion

Dans ce travail, nous nous sommes intèressés au plongement d 'arbres dans l 'hypercube. Beaucoup de chercheurs se sont intèressés à ce problème, leurs travaux ont permis de caractériser quelques classes d'arbres.

Tous les arbres sont plongeables dans l'hypercube. Le problème consiste à trouver la plus petite dimension de l'hypercube dans lequel un arbre donné y est plongeable, on parle alors d'hypercube optimal. Pour ce faire la notion de la C_n-valuation est utilisée. Ce problème a fait l'objet de plusieurs études ce qui a permis de trouver certains résultats pour quelques classes d'arbres.

Dans un deuxième temps, nous avons présenté une nouvelle technique pour déterminer les dimensions de certaines classes d'arbres.

Références

1. Arfati, J. Papadimitriou, C.H. and Papageorgiou, P. : The complexity of cubical graphs. proceedings of 11 th international Kolloquium on automata , languages and programming. (1984) 51-57.
2. Corneil, D.G. and Wagner, A. : Embeding trees in a hypercube is NP- complet. siam j. comput **19** (1990),570-590
3. Havel, I. : On hamiltonian circuits and spanning trees of hypercubes. Cas prest. Mat **109** (1984) 135-152.
4. Havel, I. and Liebel, P. : One legged caterpillars spans hypercubes. Journal of graph theory. **10** (1986) 69-77
5. Havel, I. and Moravek, J. : B-valuation of graphs . Czech- Math .jour ., **22** (1972),338-351.
6. Firsov, V. : On isometric embeddings of graph into a boolean cube. cyber - netics 1, (1965) 112-113.