Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 5, 2007, pp. 51 - 54

8

Dimension cubique de deux nouvelles classes d'arbres

Kamal KABYL

[1]Département des Sciences Commerciales, Université A.MIRA de bejaia.
[2] Faculté de Mathématiques, université Houari BOUMEDIENE(USTHB)
Bab ezzouar, Algerie.
[1]k_kabyle2000@yahoo.fr,[2]abdelhafid_berrachedi@yahoo.fr

Résumé Un arbre T est Cn- valué si les arêtes de T sont marquées par les entiers de l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ de sorte que pour toute chaîne P de T, il existe un entier $K \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ pour lequel un nombre impair d'arêtes de P sont marquées par K. Tous les arbres sont Cn- valués, le problème consiste à trouver le plus petit entier n, pour lequel un arbre donné est Cn- valué, on parle alors de la dimension cubique de l'arbre. Dans ce papier nous avons définit deux nouvelles classes pour lesquelles la dimension cubique est déterminée.

Mots clés : Hypercubes,Arbres, Cn- valuation, Plongement.

8.1 Introduction

Un plongement de $G(V, E)$ dans l'hypercube est défini par la donnée d'une application injective φ de l'ensemble des sommets de G dans l'ensemble des sommets de Q_n, et d'une application P_φ de l'ensemble des arêtes de G dans l'ensemble des arêtes de Q_n, qui associe à chaque arête uv de G une arête $\varphi(u)\ \varphi(v)$ dans Q_n. Ce problème est très étudié en théorie des graphes. En effet, de nombreux efforts ont été consacrés pour déterminer des conditions (nécessaires et/ou suffisantes) selon lesquelles un graphe G est un sous graphe d'un sous-graphe de l'hypercube Q_n.
Une classe importante à étudier est celles des arbres dans l'hypercube. Cette importance résulte de l'utilisation de ces arbres dans plusieurs domaines, à savoir : informatique, sciences sociales, recherche opérationnelle, optimisation combinatoire, théorie des réseaux électriques. . . . Le problème consiste à donner la plus petite dimension d'un hypercube dans lequel un arbre donné G est plongeable. On parle alors d'hypercube optimal et de dimension cubique de l'arbre, notée $dimG$.Dans le même contexte, on définit dans ce papier deux nouvelles classes pour lesquelles la dimension cubique est déterminée. La Cn-valuation aux cas des arbres est donnée comme suit : Un arbre T est Cn- valué si les arêtes de T sont marquées par les entiers de l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ de sorte que pour toute chaîne P de T, il existe un entier $K \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ pour lequel un nombre impair d'arêtes de P sont marquées par K.

8.2 Quelques types d'arbres plongeables dans l'hypercube

On présente certains résultats connus sur les plongements d'arbres dans l'hypercube.

8.2.1 Arbres Binaires

Un arbre est dit binaire si son degré maximum est au plus égal à trois. Un résultat concernant les arbres binaires a été donné par I. Havel

Proposition 7 *(Havel [1]) Soit T un arbre binaire d'ordre 2^n avec $n \geq 3$; si T est équilibré et possède deux sommets de degré maximum alors T est plongeable dans Q_n*

8.2.2 Arbres Binaires Complets :

Un arbre Binaire complet D_n peut être défini de la façon suivante :
Pour $n = 1$, $D_1 = K_{1,2}$. Pour $n \geq 2$ D_n est obtenu à partir de deux copies disjointes T et T' de D_{n-1} et d'un nouveau sommet v relié aux deux racines de T et T'. D_n possède un seul sommet de degré 2 (la racine), 2^n sommets pendants et 2^{n-2} sommets de degré 3.

Proposition 8 *(Havel [1]) pour $n \geq 2$, $dimD_1 = 2$ et $dimD_n = n + 2$*

8.2.3 Autres classes d'arbres binaires :

1) Pour $n \geq 1$, H_n est un arbre binaire définit inductivement comme suit : H_1 est le graphe de la figure suivante :

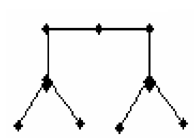

Figure 8.1. H_1

Pour $n \geq 2$, H_n est obtenu en reliant dans H_{n-1} chaque sommet pendant à deux nouveaux sommets ; les nouveaux sommets seront les sommets pendants de l'arbre H_n. H_n possède 2^{n+1} sommets pendants , $2^{n+1} - 2$ sommets de degré 3 et 3 sommets de degré 2 , donc H_n a $2^{n+2} + 1$ sommets.

Proposition 9 *(Berrachedi [3])Pour tout* $n \geq 1$; $dimH_n = n + 3$.

8.3 Deux nouvelles classes d'arbres binaires

8.3.1 La classe H_n^k

On définit un arbre binaire de la façon suivante : Pour $n \geq 1$, H_n^1 est l'arbre H_n.
Pour $n \geq 1, k \geq 1$ H_n^k est obtenu en insérant $(k-1)$ nouveaux sommets de degré 2 au niveau de l'arête ub de H_n
H_2^2 est montré dans la figure suivante :

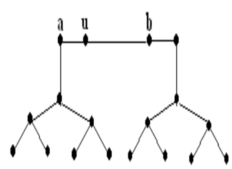

Figure 8.2. R_1

Théorème 8.1 *Pour* $n \geq 1$, $2 \leq k \leq 1$ *dim(*H_n^k*)*$= n + 3$.

8.3.2 La classe S_n

Pour $n \geq 1$, S_n est un arbre binaire définit inductivement comme suit : S_1 est le graphe de la figure suivante :

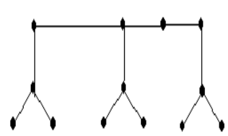

Figure 8.3. S_1

Pour $n \geq 2$, S_n est obtenu à partir de S_{n-1} tel que chaque sommet pendant est relié à deux nouveaux sommets; les nouveaux sommets seront appelés sommets pendants dans l'arbre

S_n. S_n possède 2^n sommets pendants ,3 sommets de degré 2 et 3.2^{n-1} sommets de degré 3, donc S_n a $9.2^{n-1} + 7$ sommets. Le théorème suivant donne la dimension cubique de H_n.

Théorème 8.2 *Pour tout* $n \geq 1$; $\quad dim(S_n) = n + 3$.

Références

1. I. Havel "On hamiltonian circuits and spanning trees of hypercubes" Cas prest. Mat 109(1984) 135-152
2. A. Berrachedi et M. Nekri " Trees embedable in hypercubes " à paraître dans la revue RAIRO.
3. A. Berrachedi " sur la dimension cubique de quelques classes d'arbres", Acte de colloque sur l'optimisation et les systèmes d'information (7-9 juin 2004) Tizi ouzou (Cosi'04).
4. I. Havel and P. Liebel "One legged caterpillars spans hypercubes" Journal of graph theory vol 10 (1986) 69-77.
5. I. Havel and J .Moravek "B-valuation of graphs " Czech- Math .jour ., 22(1972),338-351.