Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 5, 2007, pp. 37 - 42

6

Approximation des Caractéristiques des Systèmes d'Attente par la Méthode d'Interpolation des deux Moments

Mohamed BOUALEM

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS
Université de Béjaïa 06000, Algerie.
email : robertt15dz@yahoo.fr

Résumé Dans ce papier, nous présentons une méthode d'approximation pour l'estimation des principaux paramètres de performance dans les systèmes $GI/GI/1$ et $GI/GI/s$. La méthode des deux moments est établie selon le principe d'interpolation en combinant de manière linéaire et harmonique des solutions analytiques de systèmes d'attente simples. Plusieurs approximations du temps moyen d'attente des systèmes $GI/GI/1$, $GI/GI/s$ sont présentées.

Mots clés : Files d'attente, interpolation, méthode des deux moments, approximation.

6.1 Introduction

Pour pallier aux difficultés rencontrées dans l'obtention de solutions exactes et interprétables (analytiques) pour de nombreux systèmes d'attente, les analystes ont recouru à des méthodes d'approximation. Parmi les mieux adaptées, on trouve les techniques d'approximation des deux moments qui se satisfont de la seule information concernant les deux premiers moments. Celles-ci se basent sur l'interpolation linéaire ou harmonique d'un paramètre de performance à partir de paramètres de performance calculés pour des systèmes connus.

6.2 Approximation par interpolation des systèmes GI/GI/s

L'approche des deux moments par interpolation des systèmes développée dans cette partie appartient au type heuristique. Cette méthode a été largement utilisée pour les systèmes classiques de files d'attente.
La formulation par interpolation des systèmes présente un grand intérêt pratique dans les problèmes de conception et de décision, d'abord en raison de sa simplicité, mais surtout parce que dans les situations réelles, la seule information disponible est celle concernant

les deux premiers moments.

L'interpolation peut-être linéaire ou harmonique, mais peut également mettre en oeuvre une base d'approximation pouvant contenir plusieurs systèmes connus. Cette approche permet d'une part, de retrouver la méthode des deux moments en tant que cas particulier et, d'autre part, de justifier plus rigoureusement les arguments heuristiques à l'origine de leur usage.

6.2.1 Méthodologie de l'interpolation

Soit à considérer ξ et τ les variables aléatoires des temps d'inter-arrivées et de service respectivement, et F et B les lois de distribution correspondantes.
Kimura propose une approche unifiée en considérant le quotient :

$$Q(GI/GI/s) = \frac{\overline{W}(GI/GI/s)}{\overline{W}(GI/GI/1)} \tag{6.1}$$

La quantité $Q(GI/GI/s)$ est approximée par une fonction des quantités correspondantes pour des systèmes analysables connus tels M/M/s, GI/M/s, ... :

$$Q(GI/GI/s) \approx f(Q(\beta_1), \ldots, Q(\beta_n)) \tag{6.2}$$

où l'ensemble des systèmes simples $B = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ constitue la base de l'approximation.
Il y a différentes façons de définir la fonction f mais deux d'entre elles seront utilisées dans le cadre de cette approche :

$$Q(GI/GI/s) \approx \sum_{i=1}^{n} l_i Q(\beta_i) \tag{6.3}$$

$$Q(GI/GI/s) \approx \{\sum_{i=1}^{n} \frac{h_i}{Q(\beta_i)}\}^{-1} \tag{6.4}$$

Où $l_i \equiv l_i(GI/GI/s)$ et $h_i \equiv h_i(GI/GI/s)$ sont les coefficients de poids du $i^{\text{ème}}$ système $(i = 1, \ldots, n)$.

Les approximations (6.3) et (6.4) sont les combinaisons linéaires (de type L) et harmonique (de type H) de la quantité Q(GI/GI/s).

Théorème 6.1 *[Kimura 1994]*
Les approximations (6.3) et (6.4) sont asymptotiquement correctes lorsque $\rho \to 1$ *si :*

$$\sum_{i=1}^{n} l_i = 1 \quad et \quad \sum_{i=1}^{n} h_i = 1 \tag{6.5}$$

Les approximations (6.3) et (6.4) s'écrivent :

$$\overline{W}(GI/GI/s) = \overline{W}(GI/GI/1) \sum_{i=1}^{n} l_i Q(\beta_i) \tag{6.6}$$

et

$$\overline{W}(GI/GI/s) = \overline{W}(GI/GI/1) \{\sum_{i=1}^{n} \frac{h_i}{Q(\beta_i)}\}^{-1} \tag{6.7}$$

6.3 Approximations heuristiques du modèle GI/GI/1 avec rappels

Les méthodes heuristiques ont été utilisées pour ce type de modèles (où des approches analytiques, algorithmique et autres sont absentes), notamment pour les systèmes de type GI/G/m/m [Pourbabai 1987, 1988] ainsi que pour les réseaux en tandem dans le cas avec rappel [Pourbabai 1989, 1990].

6.3.1 Approximations heuristiques du système GI/GI/1

Soit le rapport :

$$Qr(GI/GI/s) = \frac{\overline{W}r(GI/GI/s)}{\overline{W}r(GI/GI/1)} \tag{6.8}$$

Où $\overline{W}r(GI/GI/s)$ et $\overline{W}r(GI/GI/1)$ sont les temps moyens d'attente dans la file pour les systèmes GI/GI/s et GI/GI/1 avec rappel respectivement.
Cette quantité est ensuite écrite comme une combinaison d'interpolation (linéaire et harmonique) dans la base $B \equiv \{M/M/s, M/D/s, D/M/s\}$ de systèmes simples avec rappels :

$$Qr(GI/GI/s) \approx \sum_{i=1}^{n} l_i Qr(\beta_i) \tag{6.9}$$

$$Qr(GI/GI/s) \approx \{\sum_{i=1}^{n} \frac{h_i}{Qr(\beta_i)}\}^{-1} \tag{6.10}$$

où l_i et h_i sont les coefficients de poids du $i^{\text{ème}}$ système $(i = 1, ..., n)$ de la base B et vérifient le théorème 0.1 appliqué au cas avec rappel :

6.3.2 Approximations de type linéaire

Dans la base B, l'approximation (6.9) s'écrit :

$$\begin{aligned}\overline{W}r(GI/GI/s) &\approx \overline{W}r(GI/GI/1)\sum_{i=1}^{n} l_i Qr(\beta_i) \\ &\approx \overline{W}r(GI/GI/1)\{l_1 Qr(M/M/s) + l_2 Qr(M/D/s) + l_3 Qr(D/M/s)\}\end{aligned} \tag{6.11}$$

Cette approximation est équivalente à :

$$\begin{aligned}\overline{W}r(GI/GI/s) \approx \frac{\overline{W}r(GI/GI/1)}{\overline{W}r(M/M/1)}\{l_1\overline{W}r(M/M/s) + l_2\frac{\overline{W}r(M/M/1)}{\overline{W}r(M/D/1)}\overline{W}r(M/D/s) \\ + l_3\frac{\overline{W}r(M/M/1)}{\overline{W}r(D/M/1)}\overline{W}r(D/M/s)\}\end{aligned} \tag{6.12}$$

Où,

$$\begin{aligned}\overline{W}r(M/M/1) &= \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)} + \frac{\rho}{\theta(1-\rho)} \\ \overline{W}r(M/D/1) &= \frac{\rho^2}{2\lambda(1-\rho)} + \frac{\rho}{\theta(1-\rho)}\end{aligned} \tag{6.13}$$

Pour $\overline{W}r(GI/GI/1)$, par extension heuristique du résultat exact de la file M/G/1 avec rappel, on a :

$$\overline{W}r(GI/GI/1) = \frac{\theta\rho(Ca^2+Cs^2)+2\lambda}{2(\theta\rho+\lambda)}\overline{W}r(M/M/1) \tag{6.14}$$

$$\overline{W}r(GI/GI/1) = \frac{\theta\rho(Ca^2+Cs^2)+2\lambda}{2(\theta\rho+\lambda)}g(Ca^2,Cs^2,\rho)\overline{W}r(M/M/1) \tag{6.15}$$

$$\overline{W}r(D/M/1) = \frac{\theta\rho+2\lambda}{2(\theta\rho+\lambda)}\overline{W}r(M/M/1) \tag{6.16}$$

et

$$\overline{W}r(D/M/1) = \frac{\theta\rho+2\lambda}{2(\theta\rho+\lambda)}g_{01}\overline{W}r(M/M/1) \tag{6.17}$$

A partir de (6.13), (6.14) et (6.16), l'approximation (6.12) s'écrit :

$$\begin{aligned}\overline{W}r(GI/GI/s) \approx \frac{\theta\rho(Ca^2+Cs^2)+2\lambda}{2(\theta\rho+\lambda)}\{l_1\overline{W}r(M/M/s) \\ + l_2\frac{2(\theta\rho+2\lambda)}{\theta\rho+2\lambda}\overline{W}r(M/D/s) + l_3\frac{2(\theta\rho+\lambda)}{\theta\rho+2\lambda}\overline{W}r(D/M/s)\}\end{aligned} \tag{6.18}$$

A partir de (6.13), (6.14) et (6.17), l'approximation (6.12) s'écrit :

$$\begin{aligned}\overline{W}r(GI/GI/s) \approx \frac{\theta\rho(Ca^2+Cs^2)+2\lambda}{2(\theta\rho+\lambda)}\{l_1\overline{W}r(M/M/s) \\ + l_2\frac{2(\theta\rho+2\lambda)}{\theta\rho+2\lambda}\overline{W}r(M/D/s) + l_3\frac{2(\theta\rho+\lambda)}{(\theta\rho+2\lambda)g_{01}}\overline{W}r(D/M/s)\}\end{aligned} \quad (6.19)$$

En Appliquant au système M/G/1 avec rappel, les approximations (6.18) et (6.19) s'écrivent :

$$R_G \approx \frac{\theta\rho(1+Cs^2)+2\lambda}{2(\theta\rho+\lambda)}\{l+2(1-l)\frac{\theta\rho+\lambda}{\theta\rho+2\lambda}R_D\} \quad (6.20)$$

tel que :

$$R_G \equiv \frac{\overline{W}r(M/G/s)}{\overline{W}r(M/M/s)}, \quad R_D \equiv \frac{\overline{W}r(M/D/s)}{\overline{W}r(M/M/s)} \quad \text{et} \quad l = l_1 = 1 - l_2 \quad (6.21)$$

Dans la limite asymptotique $s \to \infty$, on a $R_G \ \ (R_D) \to 1$ et à partir de (6.20), on obtient :

$$l = \frac{2(\theta\rho+\lambda)}{\theta\rho(1+Cs^2)+2\lambda}Cs^2 \quad (6.22)$$

Pour le cas simple $s = 1$:

$$\begin{aligned}\overline{W}r(GI/GI/1) \approx (Ca^2+Cs^2-1)\overline{W}r(M/M/1) \\ + (1-Cs^2)\overline{W}r(M/D/1) + (1-Ca^2)\overline{W}r(D/M/1)\end{aligned} \quad (6.23)$$

$$\begin{aligned}\overline{W}r(GI/GI/1) \approx Ca^2Cs^2\overline{W}r(M/M/1) + (1-Cs^2)Ca^2\overline{W}r(M/D/1) \\ + \frac{(\theta\rho Cs^2+2\lambda)(1-Ca^2)}{\theta\rho+2\lambda}\overline{W}r(D/M/1)\end{aligned} \quad (6.24)$$

$$\begin{aligned}\overline{W}r(GI/GI/1) \approx (Ca^2+Cs^2-1)\overline{W}r(M/M/1) \\ + (1-Cs^2)\overline{W}r(M/D/1) + \frac{(1-Ca^2)}{g_{01}}\overline{W}r(D/M/1)\end{aligned} \quad (6.25)$$

6.4 Conclusion

Nous avons présenté une méthode d'approximation pour l'estimation des principaux paramètres de performance dans les systèmes GI/GI/1 et GI/GI/s.

La méthode d'approximation des deux moments est établie selon le principe d'interpolation en combinant (de manière linéaire et harmonique) des solutions analytiques de systèmes simples que sont les files M/M/1, M/D/1 et D/M/1. Plusieurs approximations du temps moyen d'attente des systèmes GI/GI/1, GI/GI/s sont présentées.

-Des investigations plus détaillées sont souhaitables dans le but d'élargir le domaine de validité de l'approximation des deux moments. Enfin, cette même approche est à encourager afin de connaître le degré de validité de la méthode en considérant un coefficient de variation relatif à la distribution des inter-rappels (système $GI/GI/1$ avec rappel général).

Il serait aussi intéressant d'engager des réflexions sur la possibilité d'appliquer ces résultats pour les systèmes d'attente avec rappels et vacances.