Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 5, 2007, pp. 31 - 36

5

Etude d'une file d'attente $M/G/1$ avec pannes dépendantes

Karim ABBAS

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS
Université de Béjaïa 06000, Algerie.
email : karabbas2003@yahoo.fr

Résumé Dans ce travail, on a étudié le modèle de files d'attente M/G/1 avec pannes dépendantes. On a obtenu le noyau de transition associé à la chaîne de Markov décrivant l'état de ce modèle. Ainsi, on a également obtenu les probabilités de transition d'un autre modèle spécifique. En utilisant la méthode de stabilité forte, cela nous a permis d'estimer l'erreur due à l'approximation des mesures de performance d'un modèle d'attente M/G/1 avec pannes dépendantes par celles correspondantes du modèle d'attente M/G/1 classique, en supposant que le taux de pannes est suffisamment petit.

Mots clés : Le modèle d'attente M/G/1 avec pannes dépendantes ; Méthode de la stabilité forte ; Chaînes de Markov ; Approximation ; Mesures de performance.

Dans ce travail, une étude a été faite sur le système de files d'attente $M/G/1$ avec pannes dépendantes. En effet, nous avons obtenu l'opérateur de transition de ce système. Ainsi, nous avons dérivé un autre système à partir de celui-ci pour lequel nous avons aussi obtenu les probabilités de transition. Notre but est d'exploiter par la suite ces résultats afin d'estimer l'erreur due à l'approximation des mesures de performance d'un système d'attente $M/G/1$ avec pannes dépendantes par celles du système d'attente $M/G/1$ classique lorsque le taux de pannes est suffisamment petit, et ceci en utilisant la méthode de stabilité forte.

5.1 Description des modèles

Considérons un système de files d'attente $M/G/1$ $(FIFO, \infty)$ où le serveur est sujet à des pannes aléatoires. Le flot des arrivées est poissonnien de paramètre λ. La distribution de la durée de service est générale, de taux infinitésimal $\sigma(y) = s(y)/1 - S(y)$ avec $y \in \mathbb{R}^+$, S et s étant respectivement la fonction de réparatition et la densité de la durée de temps du service. Dans ce système, nous considérons les pannes passives, c'est-à-dire, les pannes du serveur peuvent avoir lieu juste après les instants de départ d'un client. Pour l'instant, ceci peut être le cas où la stratégie du service est "scheduling strategy" et supposons que la réparation du serveur doit se terminer seulement aux instants d'arrivée d'un client. L'état du système de files d'attente $M/G/1$ avec pannes et réparation en un instant t, peut être décrit par le processus stochastique suivant :

$$S(t) = \{X(t), N(t), Y(t); t \geq 0\}, \tag{5.1}$$

où,

- $N(t) \in \mathbb{N}$: est le nombre de clients dans la file à l'instant t,
- $X(t) \in \{0, 1\}$: décrit les propriétés globales de la file (le bon ou le mouvais état),
- $Y(t) \in \mathbb{R}^+$: est la quantité du service déjà reçue par le client qui est entrain d'être servi dans le système (0 si la file est vide).

La description du système se fait à l'aide de l'évolution du vecteur d'état $S(t)$. En effet, lorsque le système n'est pas vide (c'est-à-dire, $N(t) \geq 1$) et $Y(t) > 0$, alors la file sera dite en état $X(t) = 0$ (c'est-à-dire, le serveur est en bon état). Dans ce cas, elle se comporte exactement comme la file $M/G/1$ classique. À chaque instant de départ, $N(t)$ est diminué par un et $Y(t)$ devient 0. Si $N(t) \neq 0$, lorsqu'il est diminué par un, le système peut être dans l'un des deux états possibles :

- ◦ l'un reste à l'état $X(t) = 0$, dans lequel il commence à servir au moins un des clients en attente ;
- ◦ ou de faire un saut à l'état $X(t) = 1$, dans lequel il commence une période de panne durant laquelle aucun service ne peut être fourni à aucun client.

Ce choix a été effectué par le système juste après l'instant de départ pour lequel $N(t) > 0$, et il est supposé être une fonction de l'état du vecteur $S(t)$: Supposons qu'il est en $\{X(t) = 0, N(t) = n, Y(t) = 0\}$, puis, avec une probabilité $\alpha(n)$ $(0 \leq \alpha(n) < 1)$, la transition à $X(t) = 1$ aura lieu, et avec une probabilité $1 - \alpha(n)$ le système devient en état $X(t) = 0$. Lorsqu'il est en état $\{X(t) = 1, N(t) = n, Y(t) = 0\}$, c'est-à-dire, autant que la panne est longue et n'est pas terminée, les transitions en dehors de cet état auront lieu uniquement aux instants d'arrivée d'un client. En plus, avec une probabilité $\beta(n)$ $(0 \leq \beta(n) < 1)$, qui est une fonction de l'état juste avant cette arrivée, cette transition mène à l'état $\{X(t) = 1, N(t) = n + 1, Y(t) = 0\}$ et avec une probabilité $1 - \beta(n)$ à l'état $\{X(t) = 0, N(t) = n + 1, Y(t) = 0^+\}$ (0^+ car un nouveau service sera commencé tout de suite). Lorsque $N(t) = 0$, juste après le départ d'un client, nous choisissons arbitrairement de dire que $X(t) = 1$. Un séjour dans l'état $\{X(t) = 1, N(t) = 0, Y(t) = 0\}$ se termine à l'instant de la prochaine arrivée d'un client. De la même façon que pour le cas précédent, avec une probabilité $\beta(0)$, cette arrivée produit une transition à l'état $\{X(t) = 1, N(t) = 1, Y(t) = 0\}$ et avec une probabilité $1 - \beta(0)$ à l'état $\{X(t) = 0, N(t) = 1, Y(t) = 0^+\}$. Supposons que les fonctions $\alpha(n)$ et $\beta(n)$ ont des limites quand $n \to \infty$. Notons ces limites respectivement par $\widetilde{\alpha}$ et $\widetilde{\beta}$. Définissons ainsi :

$$\widetilde{\alpha} = \sup_{n\geq 1} \alpha(n) \text{ et } \widetilde{\beta} = \sup_{n\geq 0} \beta(n). \tag{5.2}$$

Lorsque les conditions (5.3) ci-après sont vérifiées

$$\begin{cases} 0 \leq \widetilde{\alpha} < 1 \\ 0 \leq \widetilde{\beta} < 1 \\ \widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta} < 1 \end{cases} \tag{5.3}$$

alors, la condition d'ergodicité d'un tel système est de la forme [1] :

$$\varrho = \frac{\lambda}{\mu} < 1 - \frac{\widetilde{\alpha}}{1 - \widetilde{\beta}} \tag{5.4}$$

Le processus stochastique $S(t)$ d'espace d'état $\{0,1\} \times \mathbb{N} \times \mathbb{R}^+$ possède la propriété de Markov. Le calcul de son régime transitoire fera intervenir des équations intégro-différentielles. Pour cela, nous avons utilisé la méthode de la chaîne de Markov induite, qui nous ramène à l'étude de ce processus au cas discret. À cet effet, soit T_n le n-ième instant de saut du processus Markovien $S(t)$ vers l'état $(0\times\mathbb{N}\times\{0\})$. Soit S_n défini comme suit $S(T_n) = S_n = (0, N_n, \{0\})$. La propriété forte de Markov implique que S_n est une chaîne de Markov [1]. $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ a pour espace d'état $\mathbb{N}^*$. Elle est irréductible et apériodique.

Lemme 5.1. Soient $0 \leq \alpha(n) < 1$ et $0 \leq \beta(n) < 1$ et supposons que les conditions (5.3) soient vérifiées et que $\varrho = \frac{\lambda}{\mu} < 1 - \frac{\widetilde{\alpha}}{1-\widetilde{\beta}}$. L'opérateur de transition $P = (P_{ij})_{i,j\geq 0}$ de cette chaîne est défini par,

- Si $i = 0$
  - Si $j = 0$

$$P_{00} = [1 - \beta(0)] \int e^{-\lambda x} dS(x). \tag{5.5}$$

  - Si $j \geq 1$

$$\begin{aligned} P_{0j} = {} & [1 - \beta(0)] \int e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^j}{j!} dS(x) \\ & + \sum_{k=2}^{j+1} \prod_{l=0}^{k-2} \beta(l)[1 - \beta(k-1)] \int e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{j-k+1}}{(j-k+1)!} dS(x). \end{aligned} \tag{5.6}$$

- Si $i = j + 1, i \geq 1$

$$P_{ij} = [1 - \alpha(i)] \int e^{-\lambda x} dS(x). \tag{5.7}$$

- Si $i \geq 1$ et $j \geq i+1$

$$\begin{aligned}
P_{ij} = [1-\alpha(i)] \int e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{j-i+1}}{(j-i+1)!} dS(x) \\
+ \alpha(i)[1-\beta(i)] \int e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{j-i}}{(j-i)!} dS(x) \\
+ \alpha(i) \sum_{k=2}^{j-i+1} \prod_{l=0}^{k-2} \beta(l+i)[1-\beta(k+i-1)] \\
\times \int e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{j-k-i+1}}{(j-k-i+1)!} dS(x).
\end{aligned} \tag{5.8}$$

- Si $i = j \geq 1$

$$P_{ii} = [1-\alpha(i)] \int e^{-\lambda x} (\lambda x) dS(x) + \alpha(i)[1-\beta(i)] \int e^{-\lambda x} dS(x). \tag{5.9}$$

- Sinon

$$P_{ij} = 0. \tag{5.10}$$

Démonstration. Pour calculer les probabilités $(P_{ij})_{i,j\geq 0}$, il suffit de considérer l'expression suivante :

$$S_{i+1} - S_i = A_{]T_i,T_{i+1}]} - D_{]T_i,T_{i+1}]}, \tag{5.11}$$

où $A_{]s,t]}$ (respectivement, $D_{]s,t]}$) est le nombre des arrivées (respectivement, le nombre de départs) dans l'intervalle de temps $]s,t]$.

■

Par la suite, considérons que les fonctions $0 \leq \alpha(n) < 1$ et $0 \leq \beta(n) < 1$ sont des constantes. Ainsi, nous dérivons un système particulier du système précédent, pour lequel les probabilités de transition sont données en lemme suivant.

Lemme 5.2. Soient $0 \leq \alpha < 1$ et $0 \leq \beta < 1$ telles que $\alpha + \beta < 1$ et supposons que $\{\alpha(n) = \alpha, n \geq 1\}$ et $\{\beta(n) = \beta, n \geq 0\}$. $S(t)$ est ergodique si et seulement si $\varrho = \frac{\lambda}{\mu}$ satisfait :

$$0 \leq \varrho < 1 - \frac{\alpha}{1-\beta}. \tag{5.12}$$

Dans ce cas, l'opérateur de transition $P = (P_{ij})_{i,j\geq 0}$ de cette chaîne est défini par,

- Si $i = 0$

∘ Si $j = 0$

$$P_{00} = (1-\beta)\int e^{-\lambda x} dS(x). \tag{5.13}$$

∘ Si $j \geq 1$

$$\begin{aligned} P_{0j} &= (1-\beta)\int e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^j}{j!} dS(x) \\ &+ (1-\beta) j \sum_{k=2}^{j+1} \beta^{k-1} \int e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^{j-k+1}}{(j-k+1)!} dS(x). \end{aligned} \tag{5.14}$$

- Si $i = j+1, i \geq 1$

$$P_{ij} = (1-\alpha)\int e^{-\lambda x} dS(x). \tag{5.15}$$

- Si $i \geq 1$ et $j \geq i+1$

$$\begin{aligned} P_{ij} &= (1-\alpha)\int e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^{j-i+1}}{(j-i+1)!} dS(x) \\ &+ \alpha(1-\beta)\int e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^{j-i}}{(j-i)!} dS(x) \\ &+ \alpha(1-\beta)(j-i)\sum_{k=2}^{j-i+1} \beta^{k-1}\int e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^{j-k-i+1}}{(j-k-i+1)!} dS(x). \end{aligned} \tag{5.16}$$

- Si $i = j \geq 1$

$$\begin{aligned} P_{ii} &= (1-\alpha)\int e^{-\lambda x}(\lambda x) dS(x) \\ &+ \alpha(1-\beta)\int e^{-\lambda x} dS(x). \end{aligned} \tag{5.17}$$

- Sinon

$$P_{ij} = 0. \tag{5.18}$$

Démonstration. Dans ce cas, pour calculer les probabilités $(P_{ij})_{i,j\geq 0}$, il suffit de considérer dans le lemme (5.1) que $\{\alpha(n) = \alpha, n \geq 1\}$ et $\{\beta(n) = \beta, n \geq 0\}$.

■

5.2 Conclusion

Dans ce travail, nous avons obtenu les opérateurs de transition de deux systèmes d'attente de type $M/G/1$ avec pannes dépendantes. Notre but est d'exploiter ces résultats pour l'obtention des estimations quantitatives de stabilité lors de la perturbation de taux de pannes dans ces deux modèles considérés.

Références

1. F. Baccelli and T. Znati. Queueing systems with breakdowns in data base modeling. *Proceedings of Performance 81 (8 th IFIP International Symposium on Comp. Perf. Model.), North Holland, Amsterdam*, pages 213–232, 1981.