Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 5, 2007, pp. 5 - 9

2

Sur la théorie des jeux évolutionnaires et ses applications en économie

Fatiha BARACHE

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS
Université de Béjaïa 06000, Algerie.
email : barache_fatiha@yahoo.fr

Résumé La théorie des jeux évolutionnaires a connu un très grand intérêt dans divers domaines. Elle permet l'étude des populations d'individus en interactions, sous l'hypothèse que les individus sont dotés d'une rationalité limitée. Les concepts d'équilibre recherchés sont la notion de stratégies évolutionnairement stables (ESS) ainsi que le concept de réplicateur dynamique des populations. Une application de la théorie des jeux évolutionnaires pour résoudre le problème de concurrence d'entreprises a été présentée.

Mots clés : Théorie des jeux évolutionnaires, stratégie évolutionnairement stable (ESS), réplication de dynamique, concurrence d'entreprises.

2.1 Introduction

La théorie des jeux évolutionnaires s'est développée à la suite des travaux du biologiste John Maynard Smith [5]. Cette théorie est vue comme étant une application de la théorie des jeux classique (introduite pas John Nash en 1950) dans des contextes biologiques. Depuis ce temps, la théorie des jeux évolutionnaires a connu un très grand intérêt notamment dans les sciences économiques et sociales.
L'équilibre de Nash a été un concept très utilisé dans la théorie des jeux classique depuis son introduction par John Nash en 1950. Dans les années 1980, J.M. Smith et G. Price [5] ont introduit la théorie des jeux évolutionnaires en définissant le concept de stratégie évolutionnairement stable (ESS) comme un raffinement de l'équilibre de Nash. Dans ce travail, nous avons étudié les comportements des agents notamment dans des situations de conflit, où l'hypothèse de rationalité des individus est affaiblie. La relation entre le concept de ESS, celui de replication dynamique et celui d'équilibre de Nash a été établie. Une application de la théorie des jeux évolutionnaires en économie, notamment, une étude détaillée d'un problème de concurrences d'entreprises est présentée.

2.2 Stratégies évolutionnairement stables

Supposons que des individus composant une large population se rencontrent aléatoirement par paires, et ce de manière répétée, pour jouer un jeu symétrique à deux joueurs. Supposons qu'au départ tous les individus jouent une certaine stratégie, pure ou mixte, notée σ dans le jeu. Si un individu de la population joue contre un adversaire jouant la stratégie $\sigma^{'}$ avec une probabilité ε et la stratégie σ avec une probabilité $1-\varepsilon$, il reçoit alors un gain $u(\sigma,(1-\varepsilon)\sigma+\varepsilon\sigma^{'})=\sigma A[(1-\varepsilon)\sigma+\varepsilon\sigma^{'}]$.

Définition 2.1 ***(Taylor et Joncker 1978)****[6]* *Une stratégie $\sigma \in \Delta$ est une ESS, si pour $\sigma^{'} \neq \sigma$, il existe un $\bar{\varepsilon}$, tel que $0<\varepsilon<\bar{\varepsilon}$, on a :*

$$\sigma^T A[(1-\varepsilon)\sigma+\varepsilon\sigma^{'}] > \sigma^{'T} A[(1-\varepsilon)\sigma+\varepsilon\sigma^{'}], \qquad \forall \ \in \Delta^{n-1}.$$

Proposition 1 ***(Maynard Smith 1982)****[4]*
Une stratégie $\sigma \in \Delta$ est une ESS dans un jeu symétrique à deux joueurs, si et seulement si :
i) Pour tout $\sigma^{'} \in \Delta$, $\sigma^T A\sigma \geq \sigma^{'T} A\sigma$.
ii) Pour tout $\sigma^{'} \in \Delta, \sigma^{'} \neq \sigma$, si :

$$\sigma^T A\sigma = \sigma^{'T} A\sigma \implies \sigma^T A\sigma^{'} > \sigma^{'T} A\sigma^{'}.$$

Corrollaire 2.1. A partir de l'assertion (i) de la proposition 1, nous déduisons que, si une stratégie $\sigma \in \Delta$ est une ESS, alors elle est aussi un équilibre de Nash.

Proposition 2 *Si σ est un équilibre de Nash strict, alors σ est une ESS. Donc $\Delta^{ESS} \subset \Delta^{NE}$.*

Définition 2.2 ***Stratégie Neutralement Stable(NSS)****[7]*
La stratégie $\sigma \in \Delta^{n-1}$ est une NSS si et seulement si :

$$\forall \sigma^{'} \in \Delta \quad \exists\, \bar{\varepsilon} > 0 \quad \forall \varepsilon \in [0,\bar{\varepsilon}], \qquad \sigma A[(1-\varepsilon)\sigma+\varepsilon\sigma^{'}] \geq \sigma^{'} A[(1-\varepsilon)\sigma+\varepsilon\sigma^{'}].$$

On note par Δ^{NSS} l'ensemble des stratégies neutralement stables (NSS).

Définition 2.3 *(**Stratégie robuste face aux entrants en équilibre (REE)**)[7]*
La stratégie $\sigma \in \Delta$ est une REE si et seulement s'il existe $\bar{\varepsilon} > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in [0,\bar{\varepsilon}]$, $\forall\ \sigma^{'} \in \Delta \setminus \{\sigma\}$, $\sigma^{'}$ n'est pas meilleure réponse à $(1-\varepsilon)\sigma+\varepsilon\sigma^{'}$.

On note par Δ^{REE} l'ensemble des stratégies robustes face aux entrants en équilibre (REE).

Proposition 3 *[7] (**Comparaison des ensembles d'équilibres**)*

$$\Delta^{ESS} \subset \Delta^{NSS} \subset \Delta^{NE}.$$

$$\Delta^{ESS} \subset \Delta^{REE} \subset \Delta^{NE}.$$

Δ^{NSS} et Δ^{REE} ne sont pas comparables en général.

Corrollaire 2.2. [7] S'il existe une ESS intérieure alors cette ESS est unique.

2.3 Replication dynamique

La dynamique de replication est un modèle explicite du processus de sélection, spécifiant comment une population est associée avec différentes stratégies pures dans un jeu qui évolue dans le temps. La formulation mathématique des dynamiques de replication est due à Taylor et Joncker (1978) [6]. Considérons une large population mais finie d'individus qui sont "programmés" à jouer les stratégies pures $s_i \in X$ dans un jeu symétrique à deux joueurs avec des stratégies mixtes du simplexe Δ et une fonction de gain u. A un point quelconque t, dans le temps, soit $p_{s_i}(t)$ le nombre d'individus qui sont programmés à jouer la stratégie pures $s_i \in X$ à l'instant t, et soit $p(t) = \sum\limits_{s_i \in X} p_{s_i}(t) > 0$ la population totale. Un état de la population est défini comme un vecteur $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_k(t))$, où chaque composante $x_i(t)$ est la proportion des individus qui sont programmés à jouer la stratégie pure i à l'instant t : $x_i(t) = p_{s_i}(t)/p(t)$. $x(t) \in \Delta$, i.e. un état de la population est formellement identique avec une stratégie mixte. La dynamique correspondant pour une proportion x_i de la la stratégie s_i dans la population devient :

$$\dot{x}_i = x_i[U(s_i, x_{-i}) - U(x, x)]; \tag{2.1}$$

où

- ⋆ $U(s_i, x_{-i})$: est le gain espéré quand la stratégie pure s_i est jouée contre le profil de stratégie x.
- ⋆ $U(x, x)$: est le gain espéré quand le profil de stratégie x est joué dans la population (le gain moyen dans la population avec la stratégie x).
- ⋆ $\dot{x}_i$: est la proportion d'individus qui joueront la stratégie pure s_i à la prochaine génération.

L'équation (2.1) peut être écrite aussi sous la forme suivante :

$$\dot{x}_i = x_i[e^{iT} Ax - x^T Ax]. \tag{2.2}$$

Le résultat suivant est du à Taylor et Jonker [6], et il peut être vu comme le résultat de base reliant la replication dynamique et les stratégies évolutionnairement stables.

Théorème 2.1 *[6]*
Toute stratégie évolutionnaire stable $x \in \Delta$ est asymptotiquement stable pour la replication dynamique donnée dans l'équation (2.2).

Définition 2.4 *[2] Une stratégie (ou point) d'équilibre σ^* est dite **globalement stable**, si elle est stable et toute trajectoire dans l'intérieur de Δ^{n-1} converge vers σ^*.*

Théorème 2.2 *[1] Tout point stable de l'équation (2.2) est un point de Nash.*

Théorème 2.3 *[2]*
- *$\sigma^* \in \Delta$ est une ESS, alors σ^* est l.a.s pour un replicateur dynamique de l'équation (2.2).*
- *σ^* est une ESS dans l'intérieur de Δ, alors σ^* est globalement stable.*

2.4 Problèmes de concurrence d'entreprises

Le secteur des transports routiers est composé de 38.000 entreprises en France. On suppose qu'il n'existe pas d'effet d'entreprise dominante et que le secteur est réellement concurrentiel. En faisant l'hypothèse que cette recherche d'information est onéreuse, nous pouvons supposer que les affréteurs s'adressent en moyenne à deux entreprises. Ces dernières, de ce fait sont appariées deux à deux. Considérons que chaque entreprise puisse adopter deux stratégies distinctes :

1. la stratégie S_e, dans laquelle l'entreprise offre à ses chauffeurs une rémunération élevée, mais qui a pour conséquence que ses profits seront à un niveau bas et donc de déterminer une valeur de ses cash-flow V_e faible.
2. la stratégie S_b, dans laquelle l'entreprise offre à ses chauffeurs une rémunération plus faible, mais qui a pour conséquence que ses profits seront à un niveau plus élevé et donc de déterminer une valeur de ses cash-flow V_b forte.

On a donc $V_e \leq V_b$. La matrice du jeu se présente sous la forme

Entreprise 1 / Entreprise 2	s_e	s_b
s_e	$(\frac{V_e}{2}, \frac{V_e}{2})$	$(0, V_b)$
s_b	$(V_b, 0)$	$(\frac{V_b}{2}, \frac{V_b}{2})$

La stratégie S_b est une stratégie évolutionnairement stable.

L'intervention de l'état dans ce conflit consiste à modifier la matrice de jeu au travers des rémunérations des entreprises. Ceci peut-être obtenu de deux manières distinctes :

1. en pénalisant les S_b-entreprises,
2. en subventionnant les S_e-entreprises.

Notons par I la valeur présente de cette indemnité et supposons qu'il est possible de la fixer de telle sorte que $I > \frac{V_b}{2}$, parce que, pour toute autre configuration des indemnités, on retourne au cas précédent. Donc, si une S_e-entreprise se rencontre avec une S_b-entreprise, alors, le gain de la S_b-entreprise est de V_b, mais dans ce cas l'état va intervenir en indemnisant les S_e-entreprises d'une valeur de I. La matrice des rémunérations devient alors :

Entreprise 1 / Entreprise 2	S_e	S_b
S_e	$(\frac{V_e}{2}, \frac{V_e}{2})$	(I, V_b)
S_b	(V_b, I)	$(\frac{V_b}{2}, \frac{V_b}{2})$

Dans ce cas, apparaissent deux équilibres de Nash indistincts : (S_e, S_b) et (S_b, S_e) équilibres associés aux couples de rémunération : (V_b, I) et (I, V_b) ce qui suggère que dans un jeu évolutionnaire, il existe un équilibre intérieur et que ce dernier est stable.

Références

1. Benhard, P., Shaiji, A. J. : Evolutionarily Stable Strategies and dynamics. Tutorial, Example, and open Problems, University of Nice Antipolis and CNRS, (2005).
2. R. Cressman, Evolutionary game theory with two groups of individuals, Games and Economic Behavior, **11**, (1995) 237–253.
3. Friedman, F. : On economic applications of evolutionary game theory, Journal of evolutionary economic, **8** (1998) 15–34
4. Smith, J. M. : Evolution and the theory of games, Cambridge University Press, (1982)
5. Smith, J. M., Price, G. : The logic of animal conflit, Nature, **246** (1973)15–18
6. Taylor, P. D., Jonker, L. B. : Evolutionary Stable strategies and game dynamics, Mathematical biosciences, Elsevier,**40** (1978) 145–156
7. Weibull, J. W. : Evolutionnary Game Theory, Cambridge, MA : The M.I.T. Press (1995)