Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 4, 2006, pp. 83 - 92

13

Lois et Tests non Paramétriques de Fiabilité Application aux modèles de chocs

Mohand BOURAINE[1]

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS
Université de Béjaïa 06000, Algerie.
email : `m_bouraineyahoo.fr`

Résumé Ce travail s'intéresse aux tests et lois non paramétriques de fiabilité. On commence par la présentation des ordres partiels nécessaires dans la construction de ce type de lois. Par la suite, on donne quelques lois et tests développés ces dernières années. Et en fin, on termine par l'application de ces lois dans les modèles de chocs.

Mots clés : Estimation non paramétrique, Ordres partiels, Lois non paramétriques de fiabilité, Tests non paramétriques, Modèles de chocs

Introduction

Ce travail s'intéresse aux tests et lois non paramétriques de fiabilité. On commence par la présentation des ordres partiels nécessaires dans la construction de ce type de lois. Par la suite, on donne quelques lois et tests développés ces dernières années. Et en fin, on termine par l'application de ces lois dans les modèles de chocs.

13.1 Ordres partiels

Les ordres stochastiques sont fréquemment utilisés pour comparer deux variables aléatoires. De plus, plusieurs classes de distribution de durée de vie sont caractérisées par les ordres stochastiques. Plusieurs détails et applications de ces ordres peuvent être trouvé dans les Monographies de *Müller* et Stoyen (2002) et Shaked et Shanthikumer(1994). Nous donnons ci-dessous quelques ordres partiels, introduits ces dernières années :

13.1.1 Ordre TTT

Cet ordre a été introduit par Kochar, Li et Shaked(2002). On dit que X précède Y en ordre TTT transformée et on écrit $X \geq_{ttt} Y$ si pour tout $p \in [0,1]$:

$$\int_0^{F^{-1}(p)} \bar{F}(t)dt \geq \int_0^{G^{-1}(p)} \bar{G}(t)dt$$

13.1.2 L'ordre convexe croissant

On dit que X est inférieur à Y en ordre convexe croissant et on écrit $X \leq_{icx} Y$ si $E(f(X)) \leq E(f(Y))$ pour toutes les fonctions convexes croissantes.

13.1.3 L'ordre concave croissant

On dit que X est inférieur à Y en ordre concave croissant et on écrit $X \leq_{icv} Y$ si $E(f(X)) \leq E(f(Y))$ pour toutes les fonctions concaves croissantes.

13.1.4 L'ordre en transformée de Laplace

Cet ordre a été introduit par Reuter et Riedrich (1981), Alzaid, Kim, Proschan (1991) et Denuit (2001). On dit que X est inférieur à Y en Transformée de Laplace, et on écrit $X \leq_{Lt} Y$ ssi $E(e^{-tX}) \geq E(e^{-tY}), \quad \forall t > 0$. On écrit aussi, "$X \leq_L Y$" *ou* "$F \leq_L G$"

13.1.5 L'ordre du moment de la fonction génératrice

On dit que X est inférieur à Y en moment de la fonction génératrice, et on écrit $X \leq_{mgf} Y$ si $E(e^{t_0 Y})$ est finie pour certaines $t_0 > 0 \quad et \quad E(e^{tX}) \leq E(e^{tY}), \quad \forall t > 0$.
Bien sûr $\leq_{mgf}$ a un sens si le moment de la fonction génératrice existe pour au moins quelques valeurs. Par conséquent, on ajoute la condition que $E(e^{t_0 Y})$ soit fini pour un certain $t_0 > 0$ (M. Shaked et J.G. Shanthikumar, 1994 et M.A. Lariviere, 2004).

13.1.6 L'ordre du moment

L'ordre du moment a été introduit par Shaked et Shantikumar (1994). On dit que X est inférieur à Y en moment, et on écrit $X \leq_{mom} Y$, si $\quad E(X^k) \leq E(Y^k) \ \ \forall k = 1, 2....$

13.1.7 L'ordre Exponentiel

L'ordre exponentiel est inspiré de la théorie de l'utilité. Il a été introduit par Goovaerts et Al (1990) et par Kaas et Al (1994).

On dit que X est inférieur à Y selon l'ordre Exponentiel, et on écrit $X \leq_{exp} Y$ si $E(Exp(tX)) \leq E(Exp(tY))$ pour tout $t > 0$.

13.1.8 L'ordre PLR

Cet ordre peut être utilisé pour caractériser les variables aléatoires ayant des logarithmes dont la densité est log-concave (log-convexe) (Shaked et shantikumer, 1994).

Soit X et Y deux v.a continues de densités f et g respectivement . Si $f(x)/g(x)$ décroît sur l'union des supports de X et Y, alors $X \leq_{lr} Y$ (H.M. Ramos Romero et M.A. Sordo D'IAZ, 2001).
L'ordre PLR (Proportional Likelihood Ratio) est défini comme suit : Soient X et Y deux v.a non-négative et absolument continues, de fonction de densité f et g et de moyennes finies $\mu_X,\ \mu_Y$ respectivement.
Si $g(\lambda x)/f(x)$ décroît en x pour chaque positif $\lambda < 1$ sur l'union des supports de X et Y, alors on dit que $X \leq_{plr} Y$

13.1.9 Autres ordres partiel

Il existe d'autres ordres partiels comme l'ordre EW (Excess Wealth), l'ordre dispersif, l'ordre de Lorenz, les ordres de type s-C, etc.

13.2 Distributions non paramétriques de fiabilité

Divers classes de distribution ont été déjà présentées telles que : IFR (DFR), IFRA (DFRA), DMRL (IMRL), NBU (NWU), NBUE(NWUE), et HNBUE (HNBWUE). D'autres lois non paramétriques ont été introduites ces dernières années par différents auteurs comme : $\mathcal{M}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{LM}$, IGFR, IPLR (DPLR), RNBRU, NBRUE, NBRU, IRFR (DRFR), s-IFR (s-DFR), s-IFRA(s-DFRA)...

13.2.1 Distribution IDMRL

F est IDMRL (DIMRL) "Increasing (Decreasing) Initialy Then Decreasing Mean Residual Life" si et seulement si

$$E(X_t) = \frac{1}{\overline{F}(x)} \int_t^{\infty} \overline{F}(u)\, du \tag{13.1}$$

est croissante (décroissant) initialement $(t < t^*)$ *où* t^* est le point de changement, ensuite décroissante (croissante) en t $(t > t^*)$.

13.2.2 Distribution $\mathcal{L}(\overline{\mathcal{L}})$

Soit X une v.a non négative, avec une moyenne finie EX. X appartient à la classe $\mathcal{L}$ $(\overline{\mathcal{L}})$ si et seulement si

$$X \leq_{Lt} \quad (\geq_{Lt}) \quad E(EX) \tag{13.2}$$

où $E(EX)$ est une v.a exponentielle de moyenne EX (B. KlefsjÖ, 1983 et M. Denuit, 2001).
ie : ssi sa transformée de la place satisfait :

$$E\exp(-tX) \leq (\geq) \frac{1}{1+tEX}, \ \forall\ t \in \mathbb{R}^{+}. \tag{13.3}$$

13.2.3 Distribution $\mathcal{M}$

Soit X une v.a non négative avec une moyenne $\mu = EX$ et une fonction de distribution F. X est dans la classe $\mathcal{M}$ si

$$F \leq_{mgf} Exp(\mu) \tag{13.4}$$

où $Exp(\mu)$ est une distribution exponentielle de moyenne μ .
X est dans la classe $\mathcal{LM}$ si elle est de la classe $\mathcal{L}$ et de la classe $\mathcal{M}$ (B. klar et A. Müller, 2003).

13.2.4 Distribution IGFR

Soit X une v.a non négative de distribution F, de support (α, β) pour $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \infty$ et de taux de défaillance $\lambda(t)$. Larivière et Porteus (2004) définissent GFR de X comme : $g(t) = t\lambda(t)$ F est IGFR (Increasing Genrating Failure Rate) si $g(t)$ est faiblement croissante pour tout t telle que : $F(t) < 1$. Le taux de défaillance décroissant ou généralisé décroissant peut être défini de manière analogue. Evidemment, si X est IFR, il est aussi IGFR, mais le contraire n'est pas toujours vérifié. Plusieurs distributions DFR sont IGFR.

13.2.5 Distribution IPLR (DPLR)

Soit X une v.a continue non négative de densité f. On dit que X est **IPLR** (DPLR) "Increasing (Decreasing) Proportional Likelihood Ratio" si : le rapport $\frac{f(\lambda x)}{f(x)}$ est croissant (décroissant) en x pour chaque positif constant $\lambda < 1 (\lambda > 1)$ (H.M. Ramos Romero et M.A. Sordo D'IAZ, 2001).

13.2.6 Distribution k-HNBUE (k-HNWUE)

F **est** k**-HNBUE (B. Klefsjö, 1985 et A.P. Basu et N. Ebrahimi, 1985) (k-HNWUE) si :**

$$\frac{1}{\frac{1}{t}\int_0^t(x)dx} \leq (\geq)\mu^k, t \geq 0$$

où :

$$e_F(x) = \begin{cases} \{\int \bar{F}(s)ds\}\bar{F}(x) & si \ \ \bar{F}(x) > 0 \\ 0 \qquad si \ \ \bar{F}(x) = 0 \end{cases}$$

$e_F(x)$ est la moyenne de la vie résiduelle à l'âge t

Remarque 13.1 *Quand $k = 1$ on obtient les distributions HNBUE (HNWUE).*

13.2.7 Distribution RNBU

Soit X(1), X(2),...une séquence des durées de vie indépendantes et identiquements distribuées de distribution $\bar{F}$ et moyenne finie μ. Soit N(t) le nombre de renouvellement qui ont eu lieu entre [0,t) en remplacement instantané, alors la durée de vie restante à t est :

$$L(t) = \sum_{i=1}^{N(t)+1} X_i - t$$

L(t) converge rapidement vers une durée de vie aléatoire notée $\tilde{X}$ de fonction de survie :

$$\bar{W}_F(x) = \frac{1}{\mu}\int_x^\infty \bar{F}(u)du \qquad pour \ x \geq \ 0$$

Beaucoup de distributions peuvent être définies en comparant $\tilde{X}$ à X ou X_t.

Définition 13.1 *X est dite RNBU [2], [1] (Renewal New Better than Used) si*

$$X_t \leq \tilde{X} \ ie: \ \bar{F}(x) \leq \bar{W} \ F(x) \ \ avec \ x \geq 0$$

13.2.8 Autres distributions

Il existe d'autres distributions par exemple : NBRU, RNBUE, NBRUE, RNBRU, RNBRUE, HNRBUE, NBUFR (NBWUFR), NBAFR (NWAFR), DPRL-α, NBUP-α, DPRL[α,1], s-IFR, etc.

13.3 Tests statistiques pour distributions non paramétriques de fiabilité

Dans ce qui suit, nous allons présenter quelques nouveaux tests pour les classes de distributions.
Récemment, Ahmad (2001) a donné des inégalités de moment pour les classes IFR, IFRA, NBU, NBUE, NBUC, DMRL et HNBUE et les a utilisé pour concevoir de nouvelles méthodes de test pour ces classes.

13.3.1 Test pour IFRA :

On veut tester H_0 : F est exponentielle de moyenne $\mu < \infty$ contre H_1 : F est IFRA et non exponentielle (Ahmed 2001) au vu d'un échantillon aléatoire $X_1, X_2, \ldots, X_n$ issu d'une variable aléatoire X de fr F. On utilise la mesure de déviation

$$\delta_\alpha^1 = \frac{1}{\mu}[\alpha(1-\alpha)\mu - E\{min(\alpha X_1, (1-\alpha)X_2)\}]/[\alpha(1-\alpha)]. \quad (13.5)$$

La statistique du test est alors :

$$\hat{\delta}_\alpha^1 = \frac{1}{\bar{X}}[\alpha(1-\alpha)\bar{X} - \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i \neq j}\sum\{min(\alpha X_i, (1-\alpha)X_j)\}]/[\alpha(1-\alpha)]. \quad (13.6)$$

où $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ et $0 < \alpha < 1$.

Critère de décision : Les valeurs critiques de $\hat{\delta}_\alpha^1$ sont tabulées pour les échantillons de taille 5(1)25 et pour différentes valeurs de α
Concernant les échantillons de grandes taille, on rejette H_0 si la valeur de $\sqrt{n}\hat{\delta}_\alpha^1/\sigma_{0,\alpha}$ ne dépasse pas $Z_{1-\alpha}$. où

$$\sigma_{0,\alpha}^2 = \frac{\alpha(1-\alpha)(1+5\alpha-5\alpha^2}{(2-\alpha)(1+\alpha)(1-\alpha+\alpha^2}$$

13.3.2 Tests pour NBUC

Ce test est basé sur la mesure de déviation de H_0 à H_1 comme suit : $\delta^{(2)} = \{3\mu\mu_{(2)} - \mu_3\}/\mu^3$, *où* $\mu_{(2)} = E(X_1^2)$ et $\mu_{(3)} = E(X_1^3)$. La statistique du test est alors

$$\hat{\delta}^2 = \frac{1}{\bar{X}^3}\{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i \neq j}\sum(X_iX_j^2 - X_i^3)\} \quad (13.7)$$

Critère de décision : Pour les échantillons de grande tailles, on calcule $\sqrt{n}\hat{\delta}^{(2)}/\sqrt{180}$ et on rejette H_0 si cette valeur est plus grande que $Z_{1-\alpha}$.

13.3.3 Test pour DMRL :

La statistique du test est donnée par

$$\hat{\delta}^{(3)} = \frac{1}{\bar{X}}\{\bar{X} - \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} \sum min(X_i, X_j)\} \qquad (13.8)$$

Critère de décision : Pour les échantillons de grande taille, on calcule $\sqrt{3n}(\hat{\delta}^{(3)})$ et on rejette H_0 si cette valeur est plus grande que $Z_{1-\alpha}$.

13.3.4 Test pour NBU :

Basé sur un échantillon aléatoire de distribution F, on veut tester H_0 : F est exponentielle contre H_1 : F est NBU et non exponentielle. La statistique du test est alors :

$$\hat{\delta}_n^{(2)} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i_1 \neq i_2} (X_{i_1} e^{-X_{i_1}} - e^{X_{i_1}} e^{-X_{i_1} - X_{i_2}})$$

$$\varphi^{(2)}(X_{i_1}, X_{i_2}) = (X_{i_1} e^{-X_{i_1}} - e^{X_{i_1}} e^{-X_{i_1} - X_{i_2}})$$

on aura

$$\hat{\delta}_n^{(2)} = \sum_{i_1 \neq i_2} \varphi^{(2)}(X_{i_1}, X_{i_2})$$

Sous H_0, $\sigma^2_{0(2)} = V\{X_1 e^{-X_1} - \frac{1}{4}\} = \frac{5}{432}$

Critère de décision : Quand $n \to \infty$,$(\hat{\delta}_n^2 - \varphi^2)$ est asymptotiquement normale de moyenne 0 et de variance $\sigma^2_{(2)}/n$, où $\sigma^2_{(2)}$ est donnée par :

$$\sigma^2_{(2)} = V\{E[\varphi^{(2)}(X_{i_1}, X_{i_2})/X_1] + E[\varphi^{(2)}(X_{i_2}, X_{i_1})/X_1\}$$

Sous H_0, $\sigma^2_{0(2)} = \frac{5}{432}$.

13.3.5 Test pour NBUE :

Basé sur un échantillon aléatoire de distribution F, on veut tester H_0 : F est exponentielle contre H_1 : F est NBUE et non exponentielle. Soit X une v.a de distribution F, alors

$$\delta^{(4)} = 2 - 2Ee^{-X} - EX.$$

Notons que sous H_0, $\delta^{(1)} = 0$, alors qu'il est positif sous H_1, ainsi on peut tester son estimateur empirique : $\delta_n^{(4)} = 2 - \frac{2}{n} \sum_i \{e^{-X_i} + \frac{X_i}{2}\}$

Critère de décision : Pour réaliser ce test, on calcule $\sqrt{3n}\delta_n^{(4)}$ et on rejette H_0 si cette valeur dépasse la v.a normale standard Z_α

13.3.6 Test pour les classes M et LM

Ces tests que nous allons présenter ont été proposé par B.Klar (2003). Ils sont basées sur les moments empiriques de la fonction génératrice :

$$M_n(t) = \int_0^{\infty} e^{tX} dF_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{tX_i}$$

Soit $X_1, ...X_n$ un échantillon de taille n issu de F, où $F_n(x) = n^{-1}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}\{X_j \leq x\}$ est la fonction de distribution empirique. On a $M_F(t) = E[e^{tX}]$ est le moment de la fonction génératrice de X. La statistique du test pour la classe M est donnée par :

$$T_{n,a} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{exp(aY_j) - 1}{Y_j} + log(1-a) \tag{13.9}$$

où $Y_j = X_j/\bar{X}_n, 1 \leq j \leq n$
Par contre la statistique de la classe LM est donnée par

$$\bar{T}_{n,a} = \bar{X}_n \int_{-a/\bar{X}_n}^{a/\bar{X}_n} (M_n(t) - (M, 1/\bar{X}_n))dt \tag{13.10}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{exp(aY_j) - exp(-aY_j)}{Y_j} + log(\frac{1-a}{1+a}) \tag{13.11}$$

13.3.7 Autres tests non paramétriques

D'autres tests non paramétriques ont été développés ces dernières années, on cite : test pour HNBUE, pour MRL, Pour la classe L, pour la distribution à rapport de vraisemblance monotone, test du taux de défaillance monotone, test utilisant les espacements normalisés, etc

13.4 Application au modèles de chocs

Soit un équipement sujet à des chocs qui se produisent à des dates aléatoires $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$, formant un processus homogène de poisson de taux constant λ. Le ième choc produit un dommage aléatoire X_i, avec : $X_1, X_2, \ldots, X_N$ sont des variables iid. L'équipement est défaillant (R.E. Barlow et F. Proschan, 1975 ; J.L. Bon, 1995 et R. Medjoudj, 1997) lorsque le dommage cumulé dépasse un niveau spécifié x (seuil critique). L'usure est alors définie par :

$$U(t) = \sum_{i \leq N(t)} D_i \tag{13.12}$$

Où $N(t)$ est le nombre de chocs survenus dans l'intervalle $[0,t]$, et D_i sont les dommages occasionnés avant l'instant t.
La probabilité pour que l'équipement fonctionne sans défaillance dans $[0,t]$ (fiabilité) est donné par

$$\bar{H}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} F^{(k)}(x) \tag{13.13}$$

où k est le nombre de chocs, $e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$ est la probabilité que l'équipement a subit k chocs dans l'intervalle $[0,t]$, et $F^{(k)}(x)$ est la probabilité que les dommages cumulés ne dépassent pas le seuil critique x. avec $F^{(k)}(x) = 1$, $x \geq 0$ et $F^{(k)}(x) = 0$, sinon.
On distinguera plusieurs cas à étudier suivant :

- la nature de la distribution du nombre de chocs $N(t)$,
- la distribution des dommages $F(x)$,
- la probabilité de survie après k chocs que l'on notera $\bar{P}_k = F^{(k)}(x)$.

13.4.1 $N(t)$ processus poissonien et F exponentielle

Si F est exponentielle de paramètre β (hypothèse éloignée de la réalité), on aura

$$\bar{H}(x) = exp\{-\lambda e^{-\beta x}\} \tag{13.14}$$

Cette distribution est celle des valeurs extrêmes maximales (type I de Gumbel).

13.4.2 $N(t)$ processus poissonien et F quelconque

Dans ce cas, la probabilité de survie de l'équipement est donnée par

$$\bar{H}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} F^{(k)}(x) \tag{13.15}$$

Ainsi H est IFRA (Barlow et Proschan 1975).

13.4.3 $N(t)$ processus poissonien et $\bar{P}_k$ quelconque

Soit $\bar{P}_k$ la probabilité de survie après k chocs, $1 = \bar{P}_k \geq \bar{P}_1 \geq \bar{P}_2 \geq \ldots$. Alors, la probabilité de survie de l'équipement

$$\bar{H}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \bar{P}_k \tag{13.16}$$

(i) Si $\bar{P}_{k+l} \leq (\geq)\ \bar{P}_k \bar{P}_l\,;\ k,l = 0,1,2,\ldots$
(ii) et si $\bar{P}_k \sum_{j=0}^{\infty} \bar{P}_j \geq (\leq) \sum_{j=k}^{\infty} \bar{P}_j,\ k = 0,1,2,\ldots$
H est NBUE (resp. NWUE)

13.4.4 $N(t)$ quelconque et $\bar{P}_k$ quelconque

Soit $N(t)$le nombre de chocs dans $[0,t]$, soit $a_k(t) = P[N(t) = k]$ et la durée de vie moyenne $A_k(x) = \int_x^\infty a_k(t)dt,\ k = 0, 1, 2, \ldots$.
Soit $\bar{P}_k = P$(l'équipement survit à k chocs). Alors, la probabilité de survie de l'équipement jusqu'à l'instant t est donnée par

$$\bar{H}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t)(t)\bar{P}_k \tag{13.17}$$

où si $\forall k, x$, les deux relations suivantes ont lieu
(i) $\bar{P}_k \sum_{j=0}^{\infty} A_j(x)\bar{P}_j \geq (\leq) \sum_{j=k}^{\infty} A_j(t)(x)\bar{P}_j$
(ii) $A_k(x) \sum_{j=0}^{\infty} a_j(t) \geq (\leq)\ A_k(x+t)$
Alors H est NBUC (resp. NWUC).
Où $A_k(x)$ est la durée de vie résiduelle à l'instant x et après k chocs.

Références

1. A.R. Mugdadi and I. A. Ahmad : Moment Inequalities Derived from Comparing Life with its Equilibrium Form, *D*epartment of Mathematics Southern Illinois University Carbondale.
2. I.A. Ahmad and A.R. Mugdadi : Bounds of moment generating functions of some life distributions, *D*epartment of Statistics and Actuarial Science University of Central Florida, Orlando, 2001.
3. R.E. Barlow and F. Proschan : Statical Theory of Reliability and Life Testing, *S*ilver Spring, MD : To Begin With,1981.