Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 4, 2006, pp. 61 - 67

9

Stabilité forte dans un système $M_2/G/1$ avec priorité absolue

Naima HAMADOUCHE[1]

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS
Université de Béjaïa 06000, Algerie.
email : $Naima_maths$2003@yahoo.fr

Résumé Dans ce travail, nous démontrons la stabilité forte de la chaîne de Markov inclue dans un système $M/G/1$ avec priorité absolue, après perturbation du taux de arrivée de clients prioritaire.

Nous déterminons les condition pour lesquelles, il sera possible d'approximer les caractéristiques du système de file d'attente $M_2/G/1$ avec priorité absolue par celles correspondantes du système $M/G/1$ classique.

Mots clés : Systèmes de files d'attente, priorité absolue, système $M_2/G/1$, méthode de stabilité forte.

9.1 Introduction

Dans ce travail, nous démontrons la stabilité forte de la chaîne de Markov inclue dans un système $M/G/1$ avec priorité absolue, après perturbation du taux de arrivée de clients prioritaire.

Nous déterminons les condition pour lesquelles, il sera possible d'approximer les caractéristiques du système de file d'attente $M_2/G/1$ avec priorité absolue par celles correspondantes du système $M/G/1$ classique.

9.2 Description des modèles

Considérons un système de files d'attente $M_2/G_2/1$(FIFO, ∞) avec priorité absolue non conservatrice. Les clients arrivent en deux classes selon un processus de Poisson. Le flot des arrivées des clients prioritaires est $\lambda\theta$, et celui des clients non prioritaires est λ. Les durées de service étant indépendantes, de fonction de répartition $\beta^1(t)$ pour les clients prioritaires (respectivement $\beta^2(t)$ pour les clients non prioritaires). Le service d'un client non prioritaire peut être interrompu par un client prioritaire. Lorsque ce dernier termine son service, s'il n' y a pas d' autres clients prioritaires dans la file, le client interrompu recommence le service à partir de début.

L'état du système de files d'attente $M_2/G_2/1$ avec priorité absolue, en un instant t, peut être décrit comme suit :

$$S(t)=\{X(t),K(t),e(t),\ t\geq 0\}$$

Où :

$$e(t)=\begin{cases}1, & \text{si le client en service est prioritaire ;}\\ 0, & \text{si le client en service est non prioritaire .}\end{cases}$$

$X(t)$: le nombre de clients dans le système à l'instant t.

$K(t)$: La durée de temps restante du service .

Nous avons utilisé la méthode de la chaîne de Markov induite qui nous ramène à l'étude de ce processus au cas discret. Les instants "$\mathbf{t_n}$" de discrétisation sont, "**L'instant de fin de service**"

En effet, nous introduisons les notations suivantes :

X^i_{n+1} ; $i=1,2$: est le nombre de clients prioritaires (respectivement non prioritaires) dans le système à l'instant t_{n+1}.

t_{n+1} : est l'instant de fin de service.

Soit :

A^i_{n+1} $i=1,2$: une variable aléatoire qui représente le nombre de clients prioritaires (respectivement non prioritaires) qui arrivent pendant le service du $(n+1)^{ieme}$ client.
Les variables aléatoires $A^i_{n+1},\ n=1.2,...$ sont indépendantes entre elles et leur distribution est égale :

$$a^i_k=P(A^1_{n+1}=k)=\int_0^\infty \frac{(\lambda\theta t)^k}{k!}e^{-\lambda\theta t}b^i(t)dt. \tag{9.1}$$

Lemme 9.1. La suite $(X^1_n,\ X^2_n)$ forme une chaîne de Markov, d'opération de transition $P_{k,l}(i,j,\ \theta)_{i,j\ \geq 0}$ défini par :

$$P_{k,l}(i,j,\ \theta)=\begin{cases}\int\limits_0^\infty \frac{(\lambda\theta t)^{i-k+1}}{(i-k+1)!}\ \frac{(\lambda t)^{j-l}}{(j-l)!}\ e^{-\lambda(\theta+1)t}\ b^1(t)\ dt, \\ \qquad\qquad \text{si}\ \ k>0,\ j\geq l,\ l\geq 0,\ i\geq k-1 \\ \frac{1}{1+\theta}\int\limits_0^\infty \frac{(\lambda t)^{j-l+1}}{(j-l+1)!}e^{-\lambda t}b^2(t)dt+\frac{\theta}{\theta+1}\int\limits_0^\infty \frac{(\lambda\theta t)^i}{i!}\frac{(\lambda t)^{j-l}}{(j-l)!}\ e^{-\lambda(\theta+1)t}\ b^1(t)dt. \\ \qquad\qquad \text{si}\ \ k=0, j\geq l, i\geq 0 \\ \frac{\theta}{\theta+1}\int_0^\infty \frac{(\lambda\theta t)^i}{i!}\ \frac{(\lambda t)^j}{j!}\ e^{-\lambda(\theta+1)t}\ b^1(t)\ dt+\frac{1}{(1+\theta)^2}\int_0^\infty \frac{(\lambda t)^j}{j!}e^{-\lambda t}b^2(t)\ dt+ \\ +\frac{\theta}{(\theta+1)^2}\int_0^\infty \frac{(\lambda\theta t)^i}{i!}\frac{(\lambda t)^j}{j!}\ e^{-\lambda(\theta+1)t}\ b^1(t)\ dt,\ \text{si}\ \ i\geq 0,\ j\geq 0,\ k=0,\ l=0.\end{cases}$$

Remarque 9.1 *Dans tous ces cas, les variables aléatoires A^1_{n+1} et A^2_{n+1} ne dépendent pas des événements qui se sont produits avant le début du $(n)^{ième}$ service*

Considérons en même temps le système $M_2/G_2/1$ avec priorité absolue, et $\theta = 0$ (ce n'est rien d'autre que le système $M/G/1$ classique)
Soient :
$\hat{X}^1_n$: le nombre de clients prioritaires dans le système juste après la fin de service du $n^{ième}$ client.
$\hat{X}^2_n$: est le nombre de clients non prioritaires dans le système après la "fin" de service du $n^{ième}$ client.

Le noyau de transition $\hat{P}_{k,l}(i,j,0)$ est donnée par :

$$\hat{P}_{k,l}(i,j,\ 0) = \begin{cases} \int_0^\infty \ \dfrac{(\lambda t)^{j-l}}{(j-l)!}\ e^{-\lambda t}\ b^1(t)\ dt, & \text{si } \ i = k-1 j \geq l,\ k \neq 0,\ l \geq 0, \\ \\ \int_0^\infty \ \dfrac{(\lambda t)^{j-l+1}}{(j-l+1)!}\ e^{-\lambda t}\ b^2(t)\ dt, & \text{si } \ 1 \leq l \leq j+1,\ k = 0, i = 0,\ l \neq 0, \\ \\ \int_0^\infty \ \dfrac{(\lambda t)^{j}}{j!}\ e^{-\lambda t}\ b^2(t)\ dt, & \text{si } \ i \geq 0,\ j \geq 0,\ k = 0,\ l = 0, \\ 0 \quad \mathit{ailleurs}. \end{cases}$$

9.3 Stabilité forte dans un système prioritaire $M_2/G_2/1$ avec priorité absolue non conservatrice

Cette section concerne l'étude de stabilité forte de la chaîne de Markov inclue dans un système $M/G/1$ avec priorité absolue, après perturbation du taux de arrivée de clients prioritaire.

Nous déterminons les condition pour lesquelles, il sera possible d'approximer les caractéristiques du système de file d'attente $M_2/G_2/1$ avec priorité absolue par celles correspondantes du système $M/G/1$ classique.

Théorème 9.1 *Supposons que dans un système d'attente $M/G/1$, les conditions d'ergodicité suivantes sont vérifiées :*

1) $\lambda\ E(U) < 1$

2) $\exists\ a > 0$ *tel que* $E(e^{aU}) = \int_0^{\in}\ e^{au}\ \ b_2(u)\ du\ < \infty.$

Alors pour tout $\alpha > 1$, la chaîne de Markov $\hat{X}_n$ dans le système $M/G/1$ avec priorité absolue est fortement v-stable pour la fonction $V = \alpha^{i+j}$

où

$$\rho = \frac{\max(\hat{f}_1(\lambda\alpha - \lambda),\ \hat{f}_2\lambda\alpha - \lambda))}{\alpha} < 1. \tag{9.2}$$

$$\hat{f}(x) = E(e^{xU}) = \int_0^\infty \ e^{xu}\ b(u)du. \tag{9.3}$$

avec u étant la variable aléatoire caractérisant la durée de service des clients prioritaires (resp, non prioritaires) dans le système $M_2/G_2/1$ *avec priorité absolue.*

Preuve 2 *Montrons que la chaîne de Markov* $\hat{X}_n = (\hat{X}_n^1,\ \hat{X}_n^2)$ *est fortement stable pour la fonction :*

$$\begin{aligned} V : \mathcal{N} \times \mathcal{N} &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ (i,\ j) &\longrightarrow V(i,\ j) = \alpha^{i+j},\ \alpha > 1. \end{aligned}$$

Pour se faire, choisissons une fonction mesurable $h(k,\ l)$ *définie par :*

$$\begin{aligned} h : \mathcal{N} \times \mathcal{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (k,\ l) &\longrightarrow 1_{(k=0,\ l=0)} \end{aligned}$$

et une mesure α *telle que*

$$\begin{aligned} \alpha : \sigma(\mathbb{N}) \times \sigma(\mathbb{N}) &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (i,\ j) &\longrightarrow \hat{P}_{0,0}(0, j, 0) \end{aligned}$$

Où $\sigma(N)$ *est l'algèbre définie sur* $\mathbb{N}$ *et*

$$\hat{P}_{0,0}(0, j, 0) = \int_0^\infty \ \frac{(\lambda t)^j}{j!} \ e^{-\lambda t} \ \ b^2(t) \ \ dt \qquad si\ i = 0,\ k = 0,\ l = 0,\ j \geq 0.$$

9.4 Estimation de la stabilité forte

Afin d'obtenir l'erreur due à l'approximation du système $M_2/G_2/1$ avec priorité absolue, estimons au préalable la norme de déviation de l'opérateur de transition P par rapport à $\hat{P}$.

9.4.1 Estimation de la norme de déviation de l'opérateur de transition

Théorème 9.2 *Pour tout α tels que $\alpha > 1$ nous avons l'inégalité :*

$$|| \triangle ||_v = || P - \hat{P} ||_v \leq D.$$

où

$$\|\triangle\|_v \leq D = \frac{\theta^2 + 2\theta}{(\theta+1)^2} \ \hat{f}_1(\lambda\alpha\theta + \lambda\alpha - \lambda\theta - \lambda). \tag{9.4}$$

Preuve 3 *Conformément à la définition de la norme d'opérateur(**??**)on a :*

$$|| \triangle_{k,l}(i,j) ||_\nu = || P - \hat{P} ||_v = \sup_{k\geq 0} \sup_{l\geq 0} \frac{1}{\alpha^{k+l}} \sum_{i\geq 0} \sum_{j\geq 0} \alpha^{i+j} | \triangle_{k,l}(i,j,0) |$$

où,

$$|\triangle_{k,l}(i,j,0) | = |P_{k,l}(i,j,\theta) - \hat{P}_{k,l}(i,j,0)|$$

$$\|\triangle_{k,l}\| \leq \frac{1}{\alpha} \left[\hat{f}_1(\lambda\alpha - \lambda) - \hat{f}_1(\lambda\alpha - \lambda\theta - \lambda) + \hat{f}_1(\lambda\alpha\theta + \lambda\alpha - \lambda\theta - \lambda) \right] \tag{9.5}$$

Nous devons choisir la plus grande des estimations obtenues. Choisissons

$$\|\triangle\|_v \leq D = \frac{\theta^2 + 2\theta}{(\theta+1)^2} \ \hat{f}_1(\lambda\alpha\theta + \lambda\alpha - \lambda\theta - \lambda)$$

9.4.2 Fonction Génératrice

Pour pouvoir estimer la norme $\|\pi\|_v$ nécessaire pour l'obtention des inégalités de stabilité, calculons la fonction génératrice $\Pi(Z_1, Z_2)$ de $\hat{\pi}$.

Lemme 9.2. Supposons que dans un système $M/G/1$, les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} \lambda E(u) \ < \ 1, \\ \exists \ a \ > \ 0, \ \text{tel que } E(e^{au}) = \ \int_0^\infty \ e^{au} \ b_2(u) du \ < \infty. \end{cases}$$

Alors, nous avons l'égalité :

$$\Pi(Z_1, Z_2) = \frac{(Z_2 - 1)\hat{f}_2(\lambda Z_2 - \lambda)}{Z_2 - \hat{f}_2(\lambda Z_2 - \lambda)} . (1 - \frac{\lambda}{\mu}). \tag{9.6}$$

où :

$$\hat{f}_2(\lambda Z_2 - \lambda) = \int_0^\infty \ e^{\lambda(Z_2 - 1)t} \ b_2(t) dt. \tag{9.7}$$

et

$$\mu = E(u) = \int_0^\infty \ t \ b_2(t) \ dt. \tag{9.8}$$

9.4.3 Estimations quantitative de stabilité

Le théorème suivant permet de délimiter le domaine d'approximation et de fournir l'erreur commise sur la distribution stationnaire.

Théorème 9.3 *Supposons que dans un système $M/G/1$ avec priorité absolue, la condition d'ergodicité géométrique soit vérifiée. Alors sous la condition : $D < \frac{1-\rho}{C}$ et $\forall\ \alpha,\ \ \alpha > 1$ on a l'estimation :*

$$||\pi - \hat{\pi}||_\nu \leq W_\theta.$$

où

$$W_\theta = D(1+W)\ W\ (1-\rho-(1+W)D)^{-1}. \tag{9.9}$$

$$W = (\beta-1)(1-\lambda/\mu)\frac{\rho}{1-\rho}. \tag{9.10}$$

*où ρ est définis dans (**??**)*

Preuve 4 *L'utilisation du théorème (**??**), nous permet de constater que pour prouver le théorème précèdent, il est suffisant d'estimer $||\hat{\pi}_0||_v$ et $||I||_v$.*
Calculons d'abord $||\hat{\pi}_0||_v = \sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 0} V(ij)\hat{\pi}(i,j,0)$.
où

$$V(i,j) = \alpha^{i+j}.$$

Il découle directement du lemme (9.2) et de la définition $||.||_v$ que :

$$||\hat{\pi}_0||_\nu = \frac{(\alpha-1)\hat{f}_2(\lambda\alpha-\lambda)}{\alpha-\hat{f}_2(\lambda\alpha-\lambda)}(1-\frac{\lambda}{\mu}) = (\alpha-1)(1-\frac{\lambda}{\mu})\frac{\rho}{1-\rho} = W.$$

Alors

$$||\hat{\pi}_0||_\nu = W.$$

*De l'équation (**??**) et de l'inégalité $\alpha^{k+l} \geq 1$, nous avons :*

$$||I||_\nu = \sup_{k\geq 0}\sup_{l\geq 0}\frac{1}{\alpha^{k+l}}\ \leq\ 1.$$

Par définition ,

$$C = 1 + ||\ I\ ||_v||\ \hat{\pi}\ ||_v = 1+W$$

$$||\ \ \triangle_\theta\ \ ||_\nu \leq \frac{1-\rho}{C} = \frac{1-\rho}{1+W}.$$

Par conséquent ,

$$||\ \pi - \hat{\pi}\ ||_v = D(1+W)W(1-\rho-(1+W)D)^{-1}.$$

9.5 Conclusion

Dans ce travail, nous avons prouvé l'applicabilité de la méthode de stabilité forte au système d'attente $M/G/1$ avec priorité absolue, après perturbation des flot des arrivées. Nous avons clarifié les conditions d'approximation des caractéristiques du système de files d'attente $M_2/G_2/1$ avec priorité absolue non conservatrice par le système $M/G/1$ classique. La méthode de stabilité forte permet également d'obtenir les estimations quantitative de stabilité.

Comme perspective immédiate, il y a lieu de traiter un cas concret, puis de comparer les résultats obtenus avec ceux de la simulation.