Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 4, 2006, pp. 53 - 59

8

Stabilité forte dans un système d'attente avec arrivées par groupes $M^{Geo(X)}/M/1$

Lynda BOUKIR[1]

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS
Université de Béjaïa 06000, Algerie.
email : `Lynda BOUKIR@yahoo.fr`

Résumé Dans ce travail, nous prouvons l'applicabilité de la méthode de stabilité forte aux systèmes d'attente avec arrivées par groupes. Nous nous intéressons à l'étude de stabilité forte de la distribution stationnaire de la chaîne de Markov induite dans un système d'attente avec arrivées par groupes $M^{Geo(X)}/M/1$ dont la loi de la taille des groupes est géométrique, après perturbation de la distribution de la taille des groupes.

Mots clés : Systèmes de files d'attente arrivée par groupes, $M^{Geo(X)}/M/1$, méthode de stabilité forte.

8.1 Introduction

Dans ce travail, nous prouvons l'applicabilité de la méthode de stabilité forte aux systèmes d'attente avec arrivées par groupes. Nous nous intéressons à l'étude de stabilité forte de la distribution stationnaire de la chaîne de Markov induite dans un système d'attente avec arrivées par groupes $M^{Geo(X)}/M/1$ dont la loi de la taille des groupes est géométrique, après perturbation de la distribution de la taille des groupes.

8.2 Systèmes d'attente avec arrivées par groupes

8.2.1 Modèle d'attente $M^X/M/1$

Le système $M^X/M/1$ peut être décrit de la manière suivante :

Les clients arrivent en groupes de taille aléatoire C, selon un processus de Poisson de paramètre λ où : $P\{C = n\} = c_n$, et ils sont servis individuellement, les durées des services étant indépendantes et distribuées suivant une loi exponentielle de moyenne $\frac{1}{\mu}$.

Soit la fonction génératrice de la taille des groupes, $C(z)$ définit comme suit :

$$C(z) = E(z^c) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, z^n \qquad (|z| \leq 1)$$

Soit : A_i : le nombre de clients qui arrivent à l'instant t_i $\quad P(A_i = k) = c_k$

On a $P(A_1 + A_2 + \ldots + A_k = n) = \underbrace{c_n \otimes c_n \otimes \ldots \otimes c_n}_{k-produit\ \ de\ \ convolution} = C_n^{(k)}$

où $\{C_n^{(k)}\}$ est le k-produit de convolution de c_n.

tel que : $C_n^{(1)} = P(A_i = n) = c_n$. et $C_n^{(0)} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n > 0 \end{cases}$

$P_r\{$ n clients arrivent dans $(0,t)\} = p_n(t)$

$$p_n(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda\, t} \frac{(\lambda\, t)^k}{k!}\; C_n^{(k)} \qquad\qquad (n \geq 0)$$

Considérons les points de régénération suivant :

– L'instant de départ d'un client.

– Fin d'une période d'inoccupation.

La variable aléatoire X_n représentant le nombre de clients dans le système immédiatement après le $n^{ième}$ point de régénération est une chaîne de Markov à temps discret. On considère le processus B_{n+1} " le nombre de clients qui arrivent pendant le temps du $(n{+}1)^{ièm}$ service". Les variables aléatoires B_n sont indépendantes entre elles, leur distribution commune est : $k_n = P_r\{$n arrivées durant la période de service$\}$.

$$k_n = \sum_{k=0}^{n} \; C_n^{(k)} \; \frac{\mu\, \lambda^k}{(\lambda + \mu)^{k+1}}$$

Alors $\quad X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 + B_{n+1} & \text{si } \; X_n \geq 1 \\ C & \text{si } X_n = 0 \end{cases}$

Ceci montre que X_{n+1} ne dépend que de X_n et de B_{n+1} et non des valeurs prises par $X_{n-1},\ X_{n-2}, \cdots$. Ceci signifie que la suite $\{X_n,\ n = 1, 2, \ldots\}$ ainsi définie est une chaîne de Markov induite du processus $\{X(t),\ t \geq 0\}$

Régime transitoire

Les probabilités de transition de la chaîne de Markov induite $\{X_n,\ n = 1, 2, \ldots\}$ sont données par :

$P(X_{n+1} = j \ \setminus\ X_n = i) = P(B = j - i + 1) = k_{j-i+1}$

$$p_{ij} = \begin{cases} c_j & \text{si } j \geq 1 \ i = 0 \\ k_{j+1-i} & \text{si } 1 \leq i \leq j+1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Remarque 8.1 *D'après la matrice de transition la chaîne de Markov X_n est irréductible et apériodique, dont on peut montrer qu'elle converge vers une distribution limite si $\rho' < 1$.*

la quantité ρ' est l'intensité du traffic, c'est le nombre moyen d'arrivées par durée moyenne de service.

$$\rho' = E(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, k_n = \frac{\lambda}{\mu}\ E(C)$$

Régime stationnaire

Supposons que $\rho' < 1$ et soit $\pi = (\pi_0, \pi_1, \ldots)$ la distribution stationnaire de la chaîne de Markov $\{X_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ où

$$\pi_n = \lim_{k\to\infty} P\{X_k = n\}$$

On obtient :

$$\prod(z) = \frac{\pi_0\ [\ K(z)\ -\ z\, C(z)\ ]}{K(z)\ -\ z}$$

$$\pi_0 = \frac{1-\rho'}{1-\rho'+E(C)}$$

$$K(z) = \frac{\mu}{\lambda+\mu-\lambda\ C(z)}$$

8.2.2 Le modèle $M^{Geo(X)}/M/1$

Le système $M^{Geo(X)}/M/1$ peut être décrit de la manière suivante :

Les clients arrivent en groupe de taille aléatoire $\widetilde{C}$, selon un processus de Poisson de paramètre λ , et ils sont servis individuellement, les durées des services étant indépendantes et distribuées suivant une loi exponentielle de moyenne $\frac{1}{\mu}$. La taille des groupes $\widetilde{C}$ suit une distribution géométrique de paramètre q où :

$$P\{\widetilde{C} = k\} = \widetilde{c}_k = (1-q)\, q^{k-1} \qquad 0 < q < 1 \qquad (k \geq 1)$$

et une fonction génératrice :

$$\widetilde{C}(z) = E(z^{\widetilde{c}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{c}_n\, z^n \qquad (|z| \leq 1)$$

Soit : $\widetilde{A}_i$: le nombre de clients qui arrivent à l'instant t_i $\quad P(\widetilde{A}_i = k) = \widetilde{c}_k$

On a $P(\widetilde{A}_1 + \widetilde{A}_2 + \ldots + \widetilde{A}_k = n) = \underbrace{\widetilde{c}_n \otimes \widetilde{c}_n \otimes \ldots \otimes \widetilde{c}_n}_{k-produit\ \ de\ \ convolution} = \widetilde{C}_n^{(k)}$

où $\{\widetilde{C}_n^{(k)}\}$ est le k-produit de convolution de $\widetilde{c}_n$.

tel que : $\widetilde{C}_n^{(1)} = P(\widetilde{A}_i = n) = \widetilde{c}_n.$ et $\widetilde{C}_n^{(0)} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n > 0 \end{cases}$

$P_r\{$ n clients arrivent dans $(0,t)\} = \widetilde{p}_n(t)$

$$\widetilde{p}_n(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda\, t} \frac{(\lambda\, t)^k}{k!}\ \widetilde{C}_n^{(k)} \qquad\qquad (n \geq 0)$$

Considérons les points de régénération suivant :

– L'instant de départ d'un client.

– Fin d'une période d'inoccupation.

La variable aléatoire $\widetilde{X}_n$ représentant le nombre de clients dans le système immédiatement après le $n^{ième}$ point de régénération est une chaîne de Markov à temps discret. On considère le processus $\widetilde{B}_{n+1}$ "le nombre de clients qui arrivent pendant le temps du $(n+1)^{ièm}$ service". Les variables aléatoires $\widetilde{B}_n$ sont indépendantes entre elles, leur distribution commune est :

$$\widetilde{k}_n = P_r\{\text{n arrivées durant la période de service}\} = \sum_{k=0}^{n} \widetilde{C}_n^{(k)}\ \frac{\mu\, \lambda^k}{(\lambda + \mu)^{k+1}}$$

Alors $\widetilde{X}_{n+1} = \begin{cases} \widetilde{X}_n - 1 + \widetilde{B}_{n+1} & \text{si } \widetilde{X}_n \geq 1 \\ \widetilde{C} & \text{si } \widetilde{X}_n = 0 \end{cases}$

Ceci montre que $\widetilde{X}_{n+1}$ ne dépend que de $\widetilde{X}_n$ et de $\widetilde{B}_{n+1}$ et non des valeurs prises par $\widetilde{X}_{n-1},\ \widetilde{X}_{n-2}, \cdots$. Ceci signifie que la suite $\{\widetilde{X}_n,\ n = 1, 2, \ldots\}$ ainsi définie est une chaîne de Markov induite du processus $\{\widetilde{X}(t),\ t \geq 0\}$

Régime transitoire

Les probabilités de transition de la chaîne de Markov induite $\{\widetilde{X}_n,\ n = 1, 2, \ldots\}$ sont données par :

$P(\widetilde{X}_{n+1} = j \ \backslash\ \widetilde{X}_n = i) = P(\widetilde{B} = j - i + 1) = \widetilde{k}_{j-i+1}$

$$\widetilde{p}_{ij} = \begin{cases} \widetilde{c}_j & \text{si } j \geq 1,\ i = 0 \\ \widetilde{k}_{j+1-i} & \text{si } 1 \leq i \leq j+1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Remarque 8.2 *D'après la matrice de transition la chaîne de Markov* $\widetilde{X}_n$ *est irréductible et apériodique, dont on peut montrer qu'elle converge vers une distribution limite si* $\widetilde{\rho}' < 1$.

$$\widetilde{\rho}' = E(\widetilde{B}_n) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, \widetilde{k}_n = \frac{\lambda}{\mu}\ E(\widetilde{C})$$

Régime stationnaire

Supposons que $\widetilde{\rho}' < 1$ et soit $\widetilde{\pi} = (\widetilde{\pi}_0, \widetilde{\pi}_1, \ldots)$ la distribution stationnaire de la chaîne de Markov $\{\widetilde{X}_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ où

$$\widetilde{\pi}_n = \lim_{k\to\infty} P\{\widetilde{X}_k = n\}$$

$$\widetilde{\prod}(z) = \frac{\widetilde{\pi}_0\ \left[\widetilde{K}(z)\ -\ z\,\widetilde{C}(z)\right]}{\widetilde{K}(z)\ -\ z}$$

$$\widetilde{\pi}_0 = \frac{\mu\,(1-q) - \lambda}{\mu\,(1-q) - \lambda + \mu}$$

$$\widetilde{K}(z) = \frac{\mu}{\lambda + \mu - \lambda\ \widetilde{C}(z)}$$

8.3 Stabilité forte de la chaîne de Markov induite dans un système $M^{Geo(X)}/M/1$

Pour pouvoir prouver le fait de v-stabilité de notre système, nous choisissons :

$$v(k) = \frac{1}{\beta^k} + \frac{\lambda}{\mu}k, \qquad \beta > 1$$

$$h_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i \neq 1 \end{cases}$$

$$\alpha_j = \widetilde{p_{1j}} = \widetilde{k}_j = \sum_{k=0}^{j}\ \widetilde{C}_j^{(k)}\ \frac{\mu\,\lambda^k}{(\lambda+\mu)^{k+1}}$$

La démonstration de la stabilité forte de la chaîne $\widetilde{X}_n$ nécessite l'utilisation de ce résultat intermédiaire.

Lemme 8.1. On considère le système d'inégalités suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\beta-1}{\beta^2} < \dfrac{\lambda}{\mu}(1-\widetilde{\rho}') \\ et \\ \beta > \dfrac{1}{1-\widetilde{\rho}'} \end{cases}$$

Ce système admet des solutions données comme suit :

• $\beta \in]\beta_3, +\infty[$ Si $\frac{\lambda}{\mu}(1-\widetilde{\rho}') > \frac{1}{4}$

et

• $\beta \in]\beta_1, +\infty[$ Si $\frac{\lambda}{\mu}(1-\widetilde{\rho}') \leq \frac{1}{4}$

$$avec \qquad \beta_3 = \frac{1}{1-\widetilde{\rho}'} \quad et \quad \beta_1 = \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - 4\,\lambda\,\mu\,(1-\widetilde{\rho}')}}{2\,\lambda\,(1-\widetilde{\rho}')}$$

Théorème 8.1 *Supposons que la condition d'ergodicité* $\frac{\lambda}{\mu} E(\widetilde{C}) < 1$ *est vérifiée. Alors, la chaîne de Markov induite* $\widetilde{X_n}$ *est fortement v-stable pour la fonction*

$$v(k) = \frac{1}{\beta^k} + \frac{\lambda}{\mu} k \quad avec \quad \beta > \beta_1.$$

8.4 Estimation de la stabilité forte

Pour pouvoir estimer numériquement l'écart entre les distributions stationnaires des états des chaînes de Markov induites $\widetilde{X}_n$ et X_n, estimons au préalable la norme de déviation de l'opérateur de transition P par rapport à l'opérateur $\widetilde{P}$.

Théorème 8.2 *Soient* $\widetilde{P}$ *et* P *les opérateurs de transition des chaînes de Markov induites des systèmes :* $M^{Geo(X)}/M/1$ *et* $M^X/M/1$. *Alors pour tout* β *tel que* $\beta > \beta_1$ *:*

$$||P - \widetilde{P}||_v \leq \frac{2\mu}{\lambda} + \rho' + \widetilde{\rho}'$$

Conclusion

Nous avons clarifié les conditions pour lesquelles il sera possible d'approximer les caractéristiques du système de files d'attente $M^X/M/1$ avec arrivées par groupes dont la loi de la taille des groupes est générale par celles du système $M^{Geo(X)}/M/1$ avec arrivées par groupes dont la loi de la taille des groupes est géométrique. Nous avons également obtenu les inégalités de stabilité avec un calcul exact des constantes. Ces résultats pourrons faire l'objet d'une application pratique concrète. Pour ce faire, il y a lieu de quantifier l'erreur d'approximation en appliquant l'approche algorithmique. Cette erreur pourra d'ailleurs être comparée à celle obtenue en utilisant la simulation. Cela permettra d'avoir une idée de la performance de la méthode de stabilité forte.