Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 4, 2006, pp. 35 - 42

5

Analyse du système M/M/1 avec rappels et arrivées négatives via la méthode de la chaîne de Markov induite

Louiza BERDJOUDJ

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS
Université de Béjaïa 06000, Algerie.
email : `l_berdjoudj@yahoo.fr`

Résumé Dans ce travail, on considère l'anlyse stochastique du système M/M/1 avec rapplels et arrivées négatives, dans le cas où l'arrivée négative élimine un seul client positif, via la méthode de la chaîne de Markov induiteaux instants de départ. Le résultat important de ce travail est la démonstration de l'ergodicité de cete chaîne et le calcul de la distribution stationnaire du système.

Mots clés : File d'attente, rappels, arrivées négatives, chaîne de Markov induite, ergodicité.

5.1 Introduction

Les systèmes de files d'attente avec rappels sont caractérisés par la propriété qu'un client qui trouve à son arrivée tout les serveurs occupés quitte le système et rappelle ultérieurement à des instants aléatoires. Entre deux rappels successifs le client est dit "en orbite". Ces systèmes de files d'attente sont largement utilisés dans la modélisation des ordinateurs et les systèmes de télécommunications. Une description complète de situations où les systèmes de files d'attente avec rappels se présentent peut être trouver dans la monographie de Falin et Templeton [8]. Une classification bibliographique est donnée dans l'article de Artalejo [3]. Il est apparu dans la littérature des files d'attente, des travaux portant sur les systèmes et réseaux de files d'attente caractérisés par la présence de deux types d'arrivées. D'un côté, les arrivées positives ou régulières qui ont pour l'objectif l'occupation du service. De l'autre côté les arrivées négatives, dont l'effet est l'elimination d'un certain client. L'intérêt porté à cette nouvelle famille de réseaux de files d'attente avec arrivées négatives, introduite par Gelenbe [9], était motivée initialement, par la modélisation des réseaux de neurone où les arrivées positives et négatives représentent les signaux excitateurs, qui fond croître le potentiel du neurone et sa tendance à produire une impulsion, et inhibiteurs, qui diminuent le potentiel du neurone et sa tendance à produire une impulsion, respectivement. Puis leurs domaines d'applications se sont étendus pour toucher

d'autres systèmes plus complexes comme les réseaux informatique avec infection par virus [5], élimination des transactions dans les bases de données [10], les systèmes de telecommunication, les systèmes de production, etc.
Une revue récente sur ce thème peut être trouvée dans [6].

Un nombre d'articles [1, 2, 4, 5, 7] s'occupent des systèmes de files d'attente avec rappels et arrivée négatives. Il faut noter que l'existence du flot des arrivées négative est un mécanisme pour garantir un niveau modéré de la congestion de l'orbite.

dans ce travail on s'intéresse au cas où une arrivée négative élimine un seul client positif. Le reste du travail est structuré de la manière suivante : Dans la première section, on décrit le modèle.
Dans la deuxième, on étudie la chaîne de Markov induite aux instants de départ, nous redémontrons les conditions d'ergodicité et nous calculons la distribution stationnaire de cette chaîne.

5.2 Description mathématique du modèle M/M/1 avec rappels et arrivée négatives

On considère un système de files d'attente à un seul serveur avec deux types d'arrivées suivant une loi de Poisson de taux $\lambda > 0$ et $\delta \geq 0$, correspondant aux arrivées positives et négatives, respectivement. Si le serveur est libre, un client positif arrivant commence son service et quitte le système juste après sa complétion. Tout client positif, qui trouve à son arrivée le serveur occupé quitte le système momentanément et rappelle à des instants aléatoire. Entre deux rappels successifs le client est dit en orbite. Les intervalles de temps séparant les rappels successifs sont supposés indépendant et exponentiellement distribués avec un taux $\alpha(1 - \delta_{0j}) + j\mu$ lorsqu'il y a j clients dans l'orbite. Les arrivées négatives ont l'effet d'éliminer un client positif de l'orbite, si elle n'est pas vide, sélectionné suivant une certaine politique d'élimination. Les temps de service sont des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de taux ν. Les arrivées positives et négatives, les intervalles séparant deux rappels successifs et les temps de service sont supposés mutuellement indépendants.

Exemple

Cet exemple montre l'intérêt du système considéré pour modéliser quelques situations de réseaux :
Considérons un réseau informatique qui consiste en un groupe de processeurs connectés

avec une unité centrale de transmission (UCT). Si un processeur émet un message, il envoie d'abord à l'UCT, Si la transmission médiane est possible, alors l'UCT envoie immédiatement le message, sinon ce dernier sera stocké dans un espace mémoire appelé "buffer" et après un certain temps aléatoire, l'UCT doit réessayer la transmission ; En supposant que ce temps aléatoire est exponentiellement distribué alors on construit un taux de rappel le plus simple possible en supposant qu'il y a deux contributions à l'intensité des rappels. La première est la constante α intrinsèque au réseau, cependant la deuxième $j\mu$ dépend du nombre de message se trouvant dans le buffer. De plus, l'UCT envoie des signaux négatifs au buffer pour éliminer une unité. Ce mécanisme garantie un niveau modéré de la congestion dans le buffer.

Quelques cas particuliers

On peut discuter quelques particularités qui peuvent être obtenues en choisissant les paramètres α, μ et δ.
Premièrement, le cas $\delta = 0$ qui donne un système avec rappels avec la discipline linéaire de rappels qui généralise les systèmes avec rappels classiques et constants qui sont largement étudiés dans la littérature.
Le cas, $\mu = 0$ et $\delta = (1-H)\alpha$ avec $H \in (0,1)$ correspond au système avec rappels constant où le client en tête de l'orbite est impatient (non perseverant).
Enfin, le système de file d'attente classique avec arrivées négative est obtenu en faisant tendre $\alpha \to \infty$ et(ou)$\mu \to \infty$.

5.3 La chaîne de Markov induite associée au système M/M/1 avec rappels et arrivées négatives

Considérons les instants t_n de départ (fin de service ou élimination). Soit alors X_n : le nombre de clients dans l'orbite à l'instant t_n. $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov décrite par l'équation recursive suivante :

$$X_n = X_{n-1} - B_n - L_n + A_n \tag{5.1}$$

où $B_n = \begin{cases} 0, \text{ si le } n^{\text{ème}} \text{ client provient de l'extérieur ;} \\ 1, \text{ si le } n^{\text{ème}} \text{ client provient de l'orbite.} \end{cases}$

B_n est une variable aléatoire de Bernoulli qui dépend seulement de X_{n-1}, sa distribution conditionnelle est donnée par

$$P(B_n = 0/X_{n-1} = i) = \frac{\lambda}{\lambda + \alpha + i\mu}$$

$$P(B_n = 1/X_{n-1} = i) = \frac{\alpha + i\mu}{\lambda + \alpha + i\mu}$$

Les variables aléatoires A_n et L_n sont indépendantes et ne dépendent pas de X_{n-1} et B_n. Et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_n = k) &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \nu e^{-\nu t} dt \\ &= \frac{1}{k!} \lambda^k \nu \int_0^{\infty} e^{-t(\lambda+\nu)} t^k dt\end{aligned}$$

Pour calculer cette expression, nous la comparons à la densité de la loi gamma de paramètre $\lambda + \nu$ et k dont on sait que l'intégrale entre 0 et l'infini vaut 1. Il en résulte que

$$\mathbb{P}(A_n = k) = \frac{\lambda^k \nu}{(\lambda + \nu)^{k+1}}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

la variable aléatoire A_n obéit donc à une distribution géométrique de paramètre $\frac{\nu}{\lambda+\nu}$.
De même

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(L_n = j) &= \int_0^{+\infty} e^{-\delta t} \frac{(\delta t)^j}{j!} \nu e^{-\nu t} dt \\ &= \frac{1}{j!} \delta^j \nu \int_0^{\infty} e^{-t(\delta+\nu)} t^j dt \\ &= \frac{\delta^j \nu}{(\delta + \nu)^{j+1}}\end{aligned}$$

L_n obéit donc à une distribution géométrique de paramètre $\frac{\nu}{\delta+\nu}$

A_n : est le nombre de clients primaires arrivant durant le service du $n^{\text{ème}}$ client.
L_n : est le nombre de clients qui sont éliminés de l'orbite durant le $n^{\text{ème}}$ service.

Remarque 5.1 *La loi géométrique est la seule loi discrète possédant la propriété dite d'**absence de mémoire** : pour tout $m, n \geq 0$*

$$\mathbb{P}(X = m + n/X \geq m) = \mathbb{P}(X \geq n)$$

Le nombre moyen de clients arrivant durant le service du $n^{\text{ème}}$ client est donné par :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(A_n)=\sum_{k=0}^{+\infty}k\mathbb{P}(A_n=k)&=\int_0^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}ke^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\nu e^{-\nu t}dt\\&=\int_0^{+\infty}\nu e^{-(\lambda+\nu)t}\sum_{k=0}^{+\infty}k\frac{(\lambda t)^k}{k!}dt\\&=\int_0^{+\infty}\nu e^{-(\lambda+\nu)t}\lambda t\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}dt\\&=\int_0^{+\infty}\nu\lambda te^{-(\lambda+\nu)t}e^{\lambda t}dt\\&=\int_0^{+\infty}\nu\lambda te^{-\nu t}dt\\&=\lambda\int_0^{+\infty}t(\nu e^{-\nu t})dt=\frac{\lambda}{\nu}\end{aligned}\tag{5.2}$$

De même, le nombre moyen de clients éliminés de l'orbite durant le $n^{\text{ème}}$ service est donné par :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(L_n)&=\sum_{j=0}^{+\infty}j\mathbb{P}(L_n=j)\\&=\int_0^{+\infty}e^{-\delta t}\frac{(\lambda t)^{j!}}{j}\sum_{j=0}^{+\infty}j\nu e^{-\nu t}dt\\&=\int_0^{+\infty}\delta t\nu e^{-\nu t}dt=\frac{\delta}{\nu}\end{aligned}\tag{5.3}$$

5.3.1 Ergodicité de X_n

Théorème 5.1 *La chaîne de Markov induite est ergodique si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

(C_1) : $\alpha>0,\ \mu>0,\ \rho=\frac{\lambda}{\delta+\nu}<1$,
(C_2) : $\alpha>0,\ \mu=0,\ \gamma=\frac{(\lambda-\delta)(\lambda+\alpha)}{\alpha\nu}<1$.

*Démonstration (**Preuve).*** A cause de la structure recursive de l'équation (12.2), il suffit d'utiliser le critère basé sur la théorie des fonctions de Lyapunov (ou accroissement moyen). Le résultat important de cette théorie est celui du critère de Foster suivant :

Proposition 6 *Pour une chaîne de Markov irréductible et apériodique X_n d'espace d'états S, la condition suffisante pour l'ergodicité est l'existence d'une fonction non négative $f(s), s\in S$ (cette fonction est dite de Lyapunov ou fonction test) et $\varepsilon>0$ tel que l'accroissement moyen $\Delta_s=E[f(X_{n+1})-f(X_n)/X_n=s]$ est fini pour tout $s\in S$ et $\Delta_s\leq-\varepsilon$ pour tout $s\in S$ excepté peut être pour un nombre fini.*

Remarque 5.2 *Dans le cas où $S = \mathbb{Z}_+$, il est suffisant de considérer la fonction $f(k) = k$. Ceci veut dire que la chaîne est ergodique si*

$$\varDelta_k = E(X_{n+1} - X_n / X_n = k) \leq \varepsilon, \ \forall k \geq N$$

où N est suffisamment grand. Bien sûr, si $\lim_{k\to\infty} \varDelta_k = x$ existe. Cette condition est vérifiée si est seulement si $x < 0$.

Pour notre chaîne de Markov

$$\begin{aligned} \varDelta_k &= \mathbb{E}(X_{n+1} - X_n / X_n = k) \\ &= \mathbb{E}(-B_{n+1} + A_{n+1} - L_{n+1} / X_n = k) \\ &= -\mathbb{E}(B_{n+1} / X_n = k) + \mathbb{E}(A_{n+1} / X_n = k) - \mathbb{E}(L_{n+1} / X_n = k) \\ &= -\frac{\alpha + k\mu}{\lambda + \alpha + k\mu} + \frac{\lambda}{\nu} - \frac{\delta}{\nu} \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\lim_{k\to\infty} \varDelta_k = -1 + \frac{\lambda - \delta}{\nu} < 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda - \delta}{\nu} < 1 \Leftrightarrow \frac{\lambda}{\nu + \delta} < 1$$

Si $\mu = 0$ (i.e dans le cas des rappels constants)
$\varDelta_k = \frac{-\alpha}{\lambda+\alpha} + \lambda/\nu - \delta/\nu$
$\lim_{k\to\infty} \varDelta_k = \frac{-\alpha}{\lambda+\alpha} + \lambda/\nu - \delta/\nu$

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \varDelta_k < 0 &\Leftrightarrow -\frac{\alpha}{\lambda + \alpha} + \frac{\lambda - \delta}{\nu} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-\alpha\nu + (\lambda - \delta)(\lambda + \alpha)}{\nu(\alpha + \lambda)} < 0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda - \delta)(\lambda + \alpha) < \alpha\nu \\ &\Leftrightarrow \gamma = \frac{(\lambda - \delta)(\lambda + \alpha)}{\alpha\nu} < 1 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Pour démontrer que $\rho < 1$ est nécessaire pour l'ergodicité de la chaîne, on utilise le critère suivant [11] :

Proposition 7 *Une chaîne de Markov irréductible apériodique X_n d'espace d'états $\mathbb{Z}$ n'est pas ergodique si l'accroissement moyen $\varDelta_k = \mathbb{E}(X_{n+1} - X_n / X_n = k)$ est fini i.e il est borné supérieurement et il existe N tel que pour tout $k \geq N, \varDelta_k \geq 0$ si $\rho \geq 1$.*

Pour notre chaîne, si $\rho \geq 1, \varDelta_k = -\frac{\alpha+n\mu}{\lambda+\alpha+n\mu} + \rho \geq -\frac{\alpha+n\mu}{\lambda+\alpha+n\mu} + 1 = \frac{\lambda}{\lambda+\alpha+n\mu} > 0.$

5.3.2 La distribution stationnaire de X_n

On cherche à trouver la distribution stationnaire π_j de la chaîne de Markov (X_n)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{ij} &= \mathbb{P}(X_n = j/X_{n-1} = i) \\
&= \mathbb{P}(X_{n-1} - B_n + A_n - L_n = j/X_{n-1} = i) \\
&= \mathbb{P}(A_n - L_n = j - i + B_n/X_{n-1} = i) \\
&= \mathbb{P}(A_n - L_n = j - i/X_{n-1} = i, B_n = 0) \times \mathbb{P}(B_n = 0/X_{n-1} = i) \\
&+ \mathbb{P}(A_n - L_n = j - i + 1/X_{n-1} = i, B_n = 1) \times \mathbb{P}(B_n = 1/X_{n-1} = i) \\
&= \mathbb{P}(A_n - L_n = j - i) \times \mathbb{P}(B_n = 0/X_{n-1} = i) \\
&+ \mathbb{P}(A_n - L_n = j - i + 1) \times \mathbb{P}(B_n = 1/X_{n-1} = i)
\end{aligned}$$

En posant $\mathbb{P}(A_n - L_n = j) = a_j$, on aura :

$$\mathbb{P}_{ij} = a_{j-i}\frac{\lambda}{\lambda + \alpha + i\mu} + a_{j-i+1}\frac{\alpha + i\mu}{\lambda + \alpha + i\mu}$$

Pour déterminer la distribution stationnaire de X_n, utilisons directement l'équation récurrente :

$$X_n = X_{n-1} - B_n + A_n - L_n$$

Soit π_j cette distribution stationnaire, $\pi_j = \mathbb{P}(X_n = j)$; $\varphi(z) = \Sigma_{j=0}^{\infty}\pi_j z^j$ sa fonction génératrice.
Soit encore $\psi(z) = \Sigma_{j=0}^{\infty}\frac{\pi_j}{\lambda+\alpha+j\mu}z^j$ et $a(z) = \Sigma_{j=0}^{\infty}a_j z^j = \mathbb{E}(z^{A_n - L_n})$.
D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi(z) = \mathbb{E}(z^{X_n}) &= \sum_{j=0}^{\infty}\mathbb{E}(z^{X_{n-1}-B_n+A_n-L_n}/X_{n-1} = j)\mathbb{P}(X_{n-1} = j) \\
&= \Sigma_{j=0}^{\infty}z^j\mathbb{E}(z^{-B_n}/X_{n-1} = j)\mathbb{E}(z^{A_n-L_n})\pi_j \\
&= \Sigma_{j=0}^{\infty}z^j[\frac{\lambda}{\lambda + \alpha + j\mu}\cdot 1 + \frac{\alpha + j\mu}{\lambda + \alpha + j\mu}z^{-1}]\cdot a(z)\cdot\pi_j \\
&= a(z)[\lambda\Sigma_{j=0}^{\infty}\frac{\pi_j}{\lambda + \alpha + j\mu}z^j + \frac{\alpha}{z}\Sigma_{j=0}^{\infty}\frac{\pi_j}{\lambda + \alpha + j\mu}z^j \\
&+ \mu\Sigma_{j=0}^{\infty}\frac{\pi_j}{\lambda + \alpha + j\mu}jz^{j-1}] \\
&= a(z)[\lambda\psi(z) + \frac{\alpha}{z}\psi(z) + \mu\psi'(z)] \qquad (5.6) \\
&= a(z)[(\lambda + \frac{\alpha}{z})\psi(z) + \mu\psi'(z)] \qquad (5.7)
\end{aligned}$$

C'est la fonction génératrice du nombre de clients dans l'orbite aux instants de départ.

Références

1. V. V. Anisimov and J. R. Artalejo. Analysis of Makov multiserver retrial queues with negative arrivals. *Queueing Systems*, 39 :157–182, 2001.
2. J. R. Artalejo, editor. *Retrial queues with negative arrivals*, 1996.
3. J. R. Artalejo. A classiefied bibliography of research on retrial queues : Progress in 1990-1999. *Top*, 7(2) :187–211, 1999.
4. J. R. Artalejo and A. Gomez-Corall. Generalized birth and death processes with application to queues with repeated attempts and negative arrivals. *OR Spektrum*, 20 :5–14, 1998.
5. J. R. Artalejo and A. Gomez-Corall. Computation of the limiting distribution in queueing systems with repeated attempts and disasters. *RAIRO Operations Research*, 33 :371–382, 1999.
6. J.R. Artalejo. G-networks : A versatile approach for work removal in queueing networks. *European Journal of Operational Research*, 126 :233–249, 2000.
7. J.R. Artalejo and A. Gomez Corral. On a single server queue with negative arrivals and request repeated. *J. Appl. Prob.*, 36 :907–918, 1999.
8. G.I. Falin and J.G.C. Templeton. *Retrial Queues.* Chapman and hall (great britain) edition, 1997.
9. E. Gelenbe. Random neural network with negative and positive signals and product form solution. *Neural Computation*, 1 :502–510, 1989.
10. E. Gelenbe. Producty form queueing network with negative and positive customers. *Journal of Appllied Probability*, 28 :656–663, 1991.
11. L.I. Sennott, P.A. Hamplet, and R.L. Tweedie. Mean drift and the non-ergodicity of Markov chaîns. *Operations Research*, 31(4) :783–788, 1983.