

## Sur l'évaluation des performances des réseaux AD Hoc

Karima ADEL

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS  
Université de Béjaïa 06000, Algerie.  
email : [ak\\_adel@yahoo.fr](mailto:ak_adel@yahoo.fr)

**Résumé** Dans ce travail, nous présentons une modélisation du mouvement d'un nœud Ad hoc par un processus de Markov à temps discret et à espace d'état à deux dimensions et infini. Bien que les processus aléatoires sont largement étudiés dans la littérature et les résultats concernant le régime stationnaire et le calcul des caractéristiques existent, ces résultats considèrent souvent un espace d'état discret (fini ou dénombrable). Or, ce n'est pas le cas du modèle de ce papier. Cette modélisation nous a permis de calculer la probabilité d'existence d'un lien entre deux nœuds Ad hoc

**Mots clés :** Réseau Ad hoc, modélisation mathématique, mouvement des nœuds, processus de Markov, connectivité.

### 4.1 Introduction

Les réseaux ad hoc sont des réseaux mobiles sans infrastructures et sans administration centralisée (tous les nœuds sont mobiles). Ce sont les nœuds qui définissent la topologie du réseau à chaque instant, qui gèrent le routage à moindre coût, . . .

Les nœuds d'un réseau Ad Hoc sont mobiles, d'où la difficulté de maintenir une qualité de service. une solution a été en gérant le réseau en un ensemble de groupes appelés clusers. Chaque cluster est constitué d'un ensemble de nœuds dont l'un d'eux est le cluster-head, responsable d'allocation de ressources pour les nœuds dépendant de lui. L'ensemble des clusers-heads constitue l'ensemble dominant. dès que cet ensemble ne peut plus couvrir tout le réseau, un nouvel ensemble est élu.

Pour maintenir une connection entre un cluster-head et ses nœuds, le cluster-head envoie à intervalle régulier des messages de contrôle appelés "Hello messages" pour tous les nœuds.

Afin d'évaluer les performances d'un protocole, ce dernier doit être testé sous plusieurs modèles de mobilité des nœuds. Les modèles de mobilité des nœuds sont répartis en deux classes, selon le mode de déplacement des nœuds. Dans la première classe (modèle de mobilité par entité), les nœuds se déplacent indépendamment les uns des autres. Le modèle de marche aléatoire [] est l'un de ces modèles. il a été développé afin de simuler des noeuds qui

se déplacent de manière imprédictible. Dans ce modèle, un noeuds se déplacent d'un point  $A$  à un point  $B$ , en choisissant aléatoirement sa vitesse et sa direction de mouvement dans les intervalles  $[speedmin, speedmax]$  et  $[0, 2\pi]$ . Le modèle proposé dans [1] appelé chemin de points aléatoire inclu des temps de pose (pause time) entre chaque changement de direction et/ou de vitesse de déplacement. Dans [2] a été proposé de direction aléatoire pour résoudre le problème de densité waves. D'autres modèles de mobilité ont été proposés dans la littérature : le modèle de zone de simulation sans bornes [3], le modèle Gass-Markov [4] et le modèle de mobilité avec obstacles [5] ...

La prédiction de la mobilité des nœuds dans les réseaux Ad Hoc, tente de déterminer le future emplacement d'un nœud caractérisé par les coordonnées  $(x, y)$  en se basant sur l'historique des déplacements des nœuds (position, vitesse, direction, ...). La prédiction de la mobilité est utilisée pour l'amélioration du fonctionnement des protocoles de routage.

Dans ce travail, on pose le problème de l'évaluation des performances des protocoles de mobilité (dans les réseaux Ad Hoc) en particulier la gestion des messages de contrôle ( les Hello messages). Comme une bonne partie du canal est utilisée pour la transmission de ces messages et ne peut être utilisée pour la transmission de données importantes. On se demande si, on peut pas espacer l'envoi de ces messages. Et si le fait d'augmenter la durée entre deux hello messages n'entraîne pas une dégradation de la gestion du groupe.

Dans ce travail, nous avons modélisé le mouvement d'un nœud et d'un cluster-head par deux processus de markov à temps discret et à espace d'état continu ( $Y_n$  et  $X_n$ ). Pour chacun des deux processus, nous avons déterminé les probabilités de transitions. Ainsi que la distribution de la durée de connectivité entre un nœud et son cluster-head. Nous avons aussi déterminé la probabilité qu'un nœud donnée ne sort pas du rayon de transmission de son cluster-head.

Le papier est organisé comme suit : dans la section II, nous avons fait la position du problème et la modélisation. La section II est consacrée à la distance entre le nœud et le cluster-head. Dans la section III, nous avons calculé les probabilités de transition et dans la section V, nous avons établie la distribution de la durée de connectivité.

## 4.2 Position du problème et modélisation

Le cluster-head et le nœud sont mobiles (trajectoires aléatoires). Le cluster-head envoi à intervalle régulier (par exemple, toutes les secondes) un hello message qui permet au nœud de vérifier qu'il est bien toujours à portée de transmission du cluster-head. S'il ne l'est plus, alors ceci engendre une coupure du lien (si un paquet a été envoyé. En effet, si

aucun paquet n'a été envoyé, ce n'est pas grave). A ce moment là, le nœud va essayer de faire un handover.

Supposons que l'on connaisse la position du cluster-head et du nœud au moment de la réception du  $n^{\text{ième}}$  hello message. Peut-on avoir des informations sur leurs positions à l'instant de réception du  $(n+1)^{\text{ième}}$  hello message ?

En effet, si on peut avoir ces prévisions, on saura à l'avance que tel nœud ne sera plus à portée de transmission du cluster-head. A ce moment là, on pourra prendre des mesures pour éviter la rupture du lien.

Supposons que les hello messages arrivent suivant un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$ .

Notons par  $X_n = (x_n, y_n, z_n)$  la position du cluster-head au moment de la réception du  $n^{\text{ième}}$  message hello et par  $Y_n = (x'_n, y'_n, z'_n)$  la position du nœud au moment de la réception du  $n^{\text{ième}}$  message hello.

Au niveau du nœud, nous avons les informations suivantes : la position du nœud au moment de la réception du hello message+ vitesse+ état du lien avec le cluster-head.

$X_n$  et  $Y_n$  sont des processus aléatoires, d'ensembles des indices dénombrable et d'espaces des états continus.

Vu que les hello message arrivent suivant un processus de Poisson, les durées entre  $X_{n+1}$  et  $X_n$  ainsi que entre  $Y_{n+1}$  et  $Y_n$  sont indépendantes et exponentiellement distribuées. La position du cluster-head (nœud) au moment d'arrivée du  $(n+1)^{\text{ième}}$  hello message dépend uniquement de sa position au moment d'arrivée du  $n^{\text{ième}}$  hello message et non des positions précédentes.

En effet, soient

le vecteur du mouvement du clusters :  $P_{n,n+1} = (x_{n+1} - x_n, y_{n+1} - y_n, z_{n+1} - z_n)$  ;

$P'_{n,n+1} = (x'_{n+1} - x'_n, y'_{n+1} - y'_n, z'_{n+1} - z'_n)$ .

A l'aide de l'algorithme de prévision MPWCA, on obtient

$$X_{n+1} = [x_n + (x_n - x_1)/(n - 1), y_n + (y_n - y_1)/(n - 1), z_n + (z_n - z_1)/(n - 1)],$$

$$Y_{n+1} = [x'_n + (x'_n - x'_1)/(n - 1), y'_n + (y'_n - y'_1)/(n - 1), z'_n + (z'_n - z'_1)/(n - 1)],$$

où

$$\left[ \frac{x_n - x_1}{n - 1}, \frac{y_n - y_1}{n - 1}, \frac{z_n - z_1}{n - 1} \right]$$

et

$$\left[ \frac{x'_n - x'_1}{n - 1}, \frac{y'_n - y'_1}{n - 1}, \frac{z'_n - z'_1}{n - 1} \right]$$

sont des approximations ( $n \geq 2$ )

donc les processus  $\{X_n\}$  et  $\{Y_n\}$  sont markoviens à temps discret et espace d'états continu.

### 4.3 La distance entre le nœud et le cluster-head

Soient encore  $X_n = (x_n, y_n, z_n)$  et  $Y_n = (x'_n, y'_n, z'_n)$  Les positions du cluster-head et du nœud au moment de la réception du  $n^{ième}$  message hello. La distance entre deux point dans un espace à 3 dimensions ( $XoYoZ$ ) est

$$d'^2(X_n, Y_n) = (x'_{n+1} - x_{n+1})^2 + (y'_{n+1} - y_{n+1})^2 + (z'_{n+1} - z_{n+1})^2$$

Appelons  $d(X_n, Y_n)$  la projection de  $d'(X_n, Y_n)$  sur le plan ( $XoY$ ) alors

$$d'^2(X_n, Y_n) = d^2(X_n, Y_n) + (z'_{n+1} - z_{n+1})^2$$

Alors

$$d^2(X_n, Y_n) \leq d'^2(X_n, Y_n)$$

Si

$$d^2(X_n, Y_n) > R$$

où  $R$  est le rayon de transmission du cluster-head, alors, on a forcément

$$d'^2(X_n, Y_n) > R$$

donc, la distance entre deux points dans un espace à 3 dimensions ( $XoYoZ$ ) peut être étudiée considérant uniquement les coordonnées du plan  $XoY$ .

C'est pourquoi, nous limitons l'étude à un espace à deux dimensions. Et introduisons une certaine métrique qui permet de calculer la distance entre le nœud et le cluster-head :

$d(X_n, Y_n) < d_{max}$  signifie que le lien n'est pas rompu ;  $d(X_n, Y_n)$  et  $d_{max}$  sont connus.

On a :

$$d(X_n, Y_n) = \left( (x'_{n+1} - x_{n+1})^2 + (y'_{n+1} - y_{n+1})^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Supposons que les positions du cluster-head ( $X_n$ ) et du nœud ( $Y_n$ ) représentent les centres des cercles et que  $X_{n+1}$  et  $Y_{n+1}$  se trouvent sur les cercles respectifs.

On note

- $W_n$  l(inter-arrivée entre le  $(n+1)^{ième}$  et  $n^{ième}$  message hello.
- $V^h > 0$  (resp.  $V^e > 0$ ) la vitesse du cluster-head (resp. la vitesse du nœud). Supposons que ces vitesses soient constantes.
- $\theta_n^h$  (resp.  $\theta_n^e$ ) l'angle déterminé par la direction du cluster-head (resp. du nœud) et l'axe  $Ox$ .

Alors

$$x_{n+1} = x_n + V^h \cdot W_n \cdot \cos \theta_n^h$$

$$y_{n+1} = y_n + V^h \cdot W_n \cdot \sin \theta_n^h$$

De même :

$$x'_{n+1} = x'_n + V^e \cdot W_n \cdot \cos \theta_n^e$$

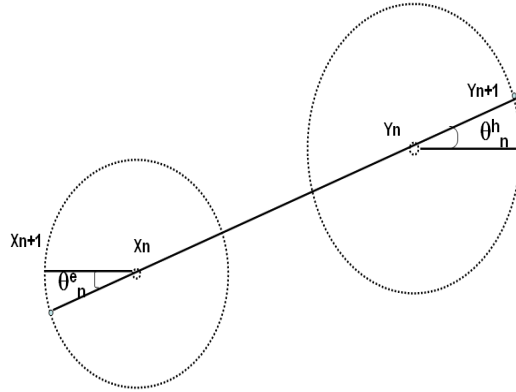
$$y'_{n+1} = y'_n + V^e \cdot W_n \cdot \sin \theta_n^e$$

Calculons  $P(d(X_{n+1}, Y_{n+1})) > d_{max}$

On se place dans le cas le plus défavorable. C'est à dire qu'à l'arrivée du (n+1)<sup>ième</sup> message hello, la distance entre le cluster-head et le nœud est la plus grande ( notée  $D_{n+1}$ ), à savoir :

$$D_{n+1} = d(X_n, Y_n) + \text{rayon du premier cercle} + \text{rayon du deuxième cercle} = d(X_n, Y_n) + V^h \cdot W_n + V^e \cdot W_n$$

On a  $P(D_{n+1} > d_{max}) = P\left(W_n > \frac{d_{max} - d(X_n, Y_n)}{V^h + V^e}\right)$  Notons par  $\alpha = \frac{d_{max} - d(X_n, Y_n)}{V^h + V^e}$



$$P(W_n > \alpha) = \exp(-\alpha\lambda) \tag{4.1}$$

### 4.4 Les probabilités de transitions

Soient  $X = (x, y)$  et  $Y = (x_1, y_1)$  deux points du plan, calculons la probabilité de transition

$$P(X_{n+1} = X / X_n = Y)$$

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1} = X/X_n = Y) &= P(x = x_1 + w_n \cos \theta_n^h V^h, y = y_1 + w_n \sin \theta_n^h V^h) \\
&= \frac{1}{2\pi \sqrt{\frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}{V^h}}} P\left(w_n = \sqrt{\frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}{V^h}}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi \sqrt{\frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}{V^h}}} \lambda e^{-\lambda \sqrt{\frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}{V^h}}} \\
P(X_{n+1} = X/X_n = Y) &= \frac{1}{2\pi \sqrt{\frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}{V^h}}} \lambda e^{-\lambda \sqrt{\frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}{V^h}}} \quad (4.2)
\end{aligned}$$

#### 4.4.1 Cas particulier

Cherchons la  $P(X_{n+1} = X/X_n = X)$

On a

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1} = X/X_n = X) &= P(x = x + w_n \cos \theta_n^h V^h, y = y + w_n \sin \theta_n^h V^h / X_n = X) \\
&= P(w_n \cos \theta_n^h V^h = 0, w_n \sin \theta_n^h V^h = 0 / X_n = X)
\end{aligned}$$

Dans les hypothèses  $V^h \neq 0$  et puisqu'on cherche  $P(X_{n+1} = X/X_n = X)$  alors  $\theta_n^h = 0$  d'où

$$P(X_{n+1} = X/X_n = X) = P(w_n = 0) = 0$$

En effet

$$P(w_n = t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad t > 0$$

et  $P(w_n = 0) = P(\text{que le } n^{\text{ème}} \text{ Hello message et le } (n+1)^{\text{ème}} \text{ Hello message arrivent au même temps})$

Mais comme les Hello message arrive selon un processus de Poisson alors  $P(w_n = 0) = 0$

Il s'agit bien d'une loi de probabilité. En effet

Montrons que

$$\int_x \int_y P(X_{n+1} = X/X_n = Y) = 1$$

On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(X_{n+1} = X/X_n = Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi \sqrt{\frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}{V^h}}} \lambda e^{-\lambda \sqrt{\frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}{V^h}}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\rho} e^{-\rho} \rho d\rho d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [-e^{-\rho}]_0^{+\infty} d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi - 0}{2\pi} = 1
 \end{aligned}$$

De la même manière, on peut calculer

$$P(Y_{n+1} = X' / Y_n = Y')$$

soient  $X' = (x', y')$  et  $Y' = (x'_1, y'_1)$  deux points du plan,

$$P(Y_{n+1} = X' / Y_n = Y') = \frac{1}{2\pi \sqrt{\frac{(x'-x'_1)^2 + (y'-y'_1)^2}{V_e}}} \lambda e^{-\lambda \sqrt{\frac{(x'-x'_1)^2 + (y'-y'_1)^2}{V_e}}} \tag{4.3}$$

### 4.5 Régime stationnaire

A présent calculons l'état stationnaire. Les processus à étudier  $\{X_n\}$  et  $\{Y_n\}$  sont des marches aléatoires (à temps discret et à espace d'états continu).

**Théorème 4.1** *les distributions de la forme*

$$f(x, y) = \frac{\lambda}{2\pi \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \exp\{-\lambda \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\} = \Pi_{(x,y)}$$

est une distribution stationnaire de la chaîne  $X_n$ . Où  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}$ .

**Preuve 1** *La chaîne  $X_n$  est doublement stochastique.*

On a

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(X_{n+1} = (x, y) / X_n = (x_1, y_1)) \cdot f(x, y) dx_1 dy_1 \\
 &= f(x, y) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{2\pi \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}} \exp\{-\lambda \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}\} dx_1 dy_1 \\
 &= f(x, y) = \pi_{(x,y)}
 \end{aligned}$$

alors, le vecteur  $\Pi = (\pi_{(x,y)})_{(x,y)}$  vérifie la relation :

$$\Pi X_n = \Pi$$

d'où la distribution  $\pi_{(x,y)}$  est une distribution stationnaire de la chaîne  $X_n$

**Remarque 4.1**  $\pi_{(x,y)} = Pr \{ \text{le cluster-head soit dans la position } (x, y) \}$

**Théorème 4.2** les distributions de la forme

$$f(x, y) = \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} \exp\{-\lambda\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\} = \Pi'_{(x,y)}$$

est une distribution stationnaire de la chaîne  $Y_n$ . Où  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}$ .

## 4.6 Durée de connectivité

La durée de connectivité entre un cluster-head et un nœud ( et ceci entre le  $(n+1)^{ième}$  et le  $n^{ième}$  hello message), définie par

$$D_c = \frac{-(ab + cd) + \sqrt{(a^2 + c^2)R^2 - (ad - cb)^2}}{a^2 + c^2}$$

où

$$a = V_n^h w_n \cos \theta_n^h - V_n^e w_n \cos \theta_n^e$$

$$b = x_n - x'_n$$

$$c = V_n^h w_n \sin \theta_n^h - V_n^e w_n \sin \theta_n^e$$

$$d = y_n - y'_n$$

$R$  = Rayon de transmission du cluster-head.

On a

$$ab = w_n b (V_n^h \cos \theta_n^h - V_n^e \cos \theta_n^e) = w_n b e;$$

$$cd = w_n d (V_n^h \sin \theta_n^h - V_n^e \sin \theta_n^e) = w_n d f; a^2 = w_n^2 e^2;$$

$$c^2 = w_n^2 f^2; ad = w_n d e; cb = w_n b f.$$

Par conséquent,

$$D_n = \frac{-(be + df) + \sqrt{(e^2 + f^2)R^2 - (de - bf)^2}}{w_n(e^2 + f^2)}.$$

La fonction de répartition de la variable  $D_n$  est donnée par

$$P(D_n < t) = P\left(\frac{-(be + df) + \sqrt{(e^2 + f^2)R^2 - (de - bf)^2}}{w_n(e^2 + f^2)} < t\right)$$



$$\begin{aligned}
&= P \left( w_n > \frac{-(be + df) + \sqrt{(e^2 + f^2)R^2 - (de - bf)^2}}{t(e^2 + f^2)} \right) \\
&= \exp \left\{ -\lambda \frac{-(be + df) + \sqrt{(e^2 + f^2)R^2 - (de - bf)^2}}{t(e^2 + f^2)} \right\}.
\end{aligned}$$

La densité de probabilité de la variable  $D_n$  est

$$g(t) = \lambda \frac{-(be + df) + \sqrt{(e^2 + f^2)R^2 - (de - bf)^2}}{t^2(e^2 + f^2)} \times \exp \frac{-(be + df) + \sqrt{(e^2 + f^2)R^2 - (de - bf)^2}}{t(e^2 + f^2)}.$$

Soit

$$u = \frac{-(be + df) + \sqrt{(e^2 + f^2)R^2 - (de - bf)^2}}{(e^2 + f^2)}.$$

Alors

$$g(t) = \frac{\lambda u}{t^2} \exp \left\{ \frac{-\lambda u}{t} \right\};$$

$$g(t) \geq 0; \int_0^{+\infty} g(t) dt = 1.$$