*Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)*
*Volume 4, 2006, pp. 7 - 13*

# 2

# Sur la dimension cubique de trois nouvelles classes d'arbres

Kamal KABYL[1]

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS
Université de Béjaïa 06000, Algerie.
email : `k_kabyle2000@yahoo.fr`

**Résumé** L'hypercube de dimension $n$, noté $Q_n$, est le graphe dont l'ensemble de sommets sont les $n$-uplets binaires et deux sommets sont adjacents si et seulement si ils différent en une seule coordonnée. Un graphe $G = (V, E)$ est dit cubique s'il est plongeable dans l'hypercube $Q_n$ pour un certain $n$. Le plus petit n pour lequel G est plongeable dans $Q_n$ est appelé dimension cubique de G. Dans ce papier, nous avons introduit trois nouvelles classes d'arbres pour lesquelles la dimension cubique est déterminée.

**Mots clés :** Hypercubes, Arbres, Cn- valuation, Isomorphisme.

Un plongement du graphe $G$ dans le graphe $H$ est une application de $V(G)$ dans $V(H)$ qui préserve l'adjacence (dans le cas où $V(G) = V(H)$ on dira que le plongement est total).

D'une manière générale l'étude d'un plongement de G dans H revient à voir si $G$ est isomorphe à un sous graphe de $H$. Ce problème est très étudié en théorie des graphes. En effet, de nombreux efforts ont été consacrés pour déterminer des conditions (nécessaires et/ou suffisantes) selon lesquelles un graphe $G$ est un sous graphe d'un graphe $H$.

Un intérêt particulier est consacré à l'étude de plongements dans l'hypercube ; ceci est du aux propriétés remarquables de l'hypercube et de son utilisation pratique en théorie des codes, transfert de l'information, architecture parallèle, décision multicritère, réseaux d'interconnexion, etc...

Une classe importante à étudier est celle des arbres plongeables dans l'hypercube, cette importance résulte de l'utilisation large des arbres dans de nombreux domaines : informatique, sciences sociales, recherche opérationnelle, optimisation combinatoire, réseaux, ... Un graphe $G = (V, E)$ est dit cubique s'il est plongeable dans l'hypercube $Q_n$ pour un certain $n$.

Firsov [4] a remarqué que les arbres sont des graphes cubiques. Le problème consiste à donner la plus petite dimension d'un hypercube dans lequel un arbre donné $G$ est plongeable. On parle alors d'hypercube optimal et de dimension cubique de l'arbre, notée $dimG$.

Arfati, Papadimitriou et Papageorgiou [2] ont montré que le problème de décider si un graphe $G$ est plongeable dans un hypercube de dimension donnée est NP-complet ; Corneil et Wagner [6] ont montré que ce problème reste NP-complet même dans le cas où G est un arbre. Plusieurs auteurs (Berrachedi, Bezrukov, Havel, Harary, Kobeissi, Laborde, Mollard, Nebesky, $\cdots$) se sont intéressés à l'étude de plongements d'arbres dans l'hypercube, ce qui a permis de caractériser certaines classes d'arbres.

Dans le même contexte, on définit dans ce papier trois nouvelles classes d'arbres pour lesquelles la dimension cubique est déterminée.

## 2.1 Définitions et concepts de base

- L'hypercube de dimension $n$, noté $Q_n$, est le graphe dont l'ensemble de sommets sont les $n$-uplets binaires et deux sommets sont adjacents si et seulement si ils différent en une seule coordonnée.
- Un graphe biparti $G = (X, Y; E)$ est dit équilibré si $card(X) = card(Y)$.
- L'hypercube $Q_n$ est un graphe biparti équilibré, $n$-régulier ayant $2^n$ sommets et $n.2^{n-1}$ arêtes.
- Si un graphe $G = (V, E)$ est plongeable dans $Q_n$, alors :

  1) $G$ est biparti ;

  2) Le degré maximum de $G$ doit être inférieur ou égal à $n$ ;

  3) $\mid V(G) \mid \leq 2^n$ ; si de plus $\mid V(G) \mid = 2^n$, alors G doit être équilibré.

  Ces conditions ne sont pas suffisantes.

- Un arbre $T$ est dit $Cn$-valué si les arêtes de $T$ sont marquées par les entiers de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ de sorte que pour toute chaîne $P$ de $T$, il existe un entier $k \in \{1, \ldots, n\}$, pour lequel un nombre impair d'arêtes de $P$ sont marquées par $k$.

Havel et Moravek [13], ont montré qu'un graphe G est plongeable dans $Q_n$ si et seulement si il existe une $Cn$-valuation de $G$.

## 2.2 Quelques classes d'arbres cubiques connus

On présente certains résultats connus sur les plongements d'arbres dans l'hypercube.

### 2.2.1 Arbres Binaires

Un arbre est dit binaire si son degré maximum est au plus égal à trois. Un résultat concernant les arbres binaires a été donné par I. Havel

**Proposition 1** *(Havel [3])*
*Soit $T$ un arbre binaire d'ordre $2^n$ avec $n \geq 3$ ; si $T$ est équilibré et possède deux sommets de degré 3 alors $T$ est plongeable dans $Q_n$*

### 2.2.2 Arbres Binaires Complets :

Un arbre Binaire complet $D_n$ peut être défini de la façon suivante :
Pour $n = 1$, $D_1 = K_{1,2}$. Pour $n \geq 2$ $D_n$ est obtenu à partir de deux copies disjointes $T$ et $T'$ de $D_{n-1}$ et d'un nouveau sommet $v$ relié aux deux racines de $T$ et $T'$. $D_n$ possède un seul sommet de degré 2 (la racine), $2^n$ sommets pendants et $2^n - 2$ sommets de degré 3.

**Proposition 2** *(Havel [3])*
*Pour $n \geq 2$, $dim D_1 = 2$ et $dim D_n = n + 2$*

### 2.2.3 Autres classes d'arbres binaires :

1) Pour $n \geq 2, B_n$ est l'arbre obtenu à partir de $D_{n-1}$ en ajoutant un sommet relié à la racine de $D_{n-1}$. $B_n$ possède $2^{n-1} + 1$ sommets pendants et $2^{n-1} - 1$ sommets de degré 3. $B_1$ est le graphe $K_{1,2}$.

   **Proposition 3** *(Havel [3])*
   *Pour tout $n \geq 2$, $dim B_n = n + 1$*

2 ) Pour $n \geq 1$, $\widehat{\widehat{D}}_n$ est un arbre formé à partir de deux copies disjointes de $D_n$, en reliant leurs racines par une arête (appelée arête axial). $\widehat{\widehat{D}}_n$ a $2^{n+2} - 2$ sommets.

**Proposition 4** *(Havel [3])*
*pour tout* $n \geq 1$, $dim\widehat{\widehat{D}}_n = n+2$.

3) Pour $n \geq 1$, l'arbre $\widehat{D}_n$ est formé à partir de $\widehat{\widehat{D}}_n$ en insérant deux nouveaux sommets sur l'arête axial , (la chaîne obtenue à partir de l'arête axial sera appelée chaîne axial) de $\widehat{D}_n$. L'arbre $\check{D}_n$ est défini à partir de $\widehat{\widehat{D}}_n$ en insérant deux nouveaux sommets sur une arête pendante de $\widehat{\widehat{D}}_n$. $\check{D}_n$ et $\widehat{D}_n$ possèdent le même nombre de sommets ($2^{n+2}$).

**Proposition 5** *(Nebesky [5])*
*Pour tout* $n \geq 1$, $dim\widehat{D}_n = dim\check{D}_n = n+2$

## 2.3 Trois nouvelles classes d'arbres binaires

### 2.3.1 La classe $R_n$

On définit un arbre binaire de la façon suivante : Pour $n \geq 1$, $R_n$ est obtenu inductivement comme suit : $R_1$ est l'arbre de la figure suivante :

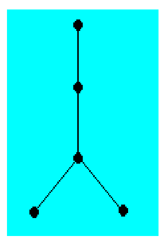

**Figure 2.1.** $R_1$

Pour $n \geq 2$, $R_n$ est obtenu à partir de $R_{n-1}$ comme suit : Chaque sommet pendant relié à un sommet de degré 3 dans $R_{n-1}$ est relié à deux nouveaux sommets non adjacents. $R_n$ possède $2^n+1$ sommets pendants, un sommet de degré 2, et $2^n-1$ sommets de degré 3, donc $R_n$ a $2^{n+1}+1$ sommets.

Le théorème suivant donne la dimension cubique de $R_n$.

**Théorème 2.1** *Pour tout* $n \geq 1$, $dimR_n = n+2$.

Nous avons généralise cette classe en définissant l'arbre $R_n^k$ , obtenu de la manière suivante : $R_n^0$ est l'arbre binaire $B_{n+1}$ ;$R_n^1$ est l'arbre $R_n$ ; $R_n^k(k \geq 2)$ est obtenu à partir de $R_n$ en insérant $(k-1)$ nouveaux sommets sur l'arête pendante incidente au sommet de degré 2 de $R_n$.

**Théorème 2.2** *Pour tout* $n \geq 2, \quad 2 \leq k \leq n+2; dim(R_n^k) = n+2.$

### 2.3.2 La classe $M_n$

Pour $n \geq 1, M_n$ est obtenu en prenant deux copies disjointes $T_1$ et $T_2$ de $R_n$ en reliant l'unique sommet de degré 2 de $T_1$ à l'unique sommet de degré 2 de $T_2$ . $M_n$ possède $2^{n+1}+2$ sommets pendants et $2^{n+1}$ sommets de degré 3 ; ce qui fait au total $2^{n+2}+2$ sommets.

**Théorème 2.3** *Pour tout* $n \geq 1 \quad dim M_n = n+3.$

La $C5$ - valuation de $M_2$ est montrée dans la figure suivante :

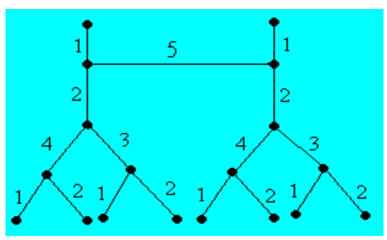


**Figure 2.2.** La c5 valuation de $M_2$

Nous avons généralise cette classe en définissant l'arbre $M_n^k$ comme suit : $M_n^k$ est l'arbre obtenu à partir de deux copies disjointes $T_1$ et $T_2$ de $R_n^k$ où l'unique sommet de degré 2 adjacent à un sommet de degré 3 de $T_1$ est relié par une arête à l'unique sommet de degré 2 adjacent à un sommet de degré 3 de $T_2$. Pour $k=1; \quad M_n^1 = M_n$.

**Théorème 2.4** *Pour tout* $n \geq 1, \quad 2 \leq k \leq n+2; \quad dim\ M_n^k = n+3.$

### 2.3.3 La classe $H_n$

Pour $n \geq 1$, $H_n$ est un arbre binaire définit inductivement comme suit : $H_1$ est le graphe de la figure suivante :

Pour $n \geq 2$, $H_n$ est obtenu en reliant dans $H_{n-1}$ chaque sommet pendant à deux nouveaux sommets ; les nouveaux sommets seront appelés sommets pendants de l'arbre

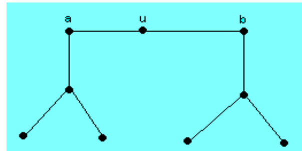


**Figure 2.3.** $H_1$

$H_n$. $H_n$ possède $2^{n+1}$ sommets pendants , $2^{n+1}-2$ sommets de degré 3 et 3 sommets de degré 2 , donc $H_n$ a $2^{n+2}+1$ sommets. Le théorème suivant donne la dimension cubique de $H_n$.

**Théorème 2.5** *Pour tout* $n \geq 1$; $\quad dimH_n = n+3$.

## Conclusion

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés au plongement d 'arbres dans l 'hypercube. Beaucoup de chercheurs se sont intéressés à ce problème, leurs travaux ont permis de caractériser quelques classes d'arbres.

Tous les arbres sont plongeables dans l'hypercube. Le problème consiste à trouver la plus petite dimension de l'hypercube dans lequel un arbre donné y est plongeable, on parle alors d'hypercube optimal. Pour ce faire la notion de la $C_n$-valuation est utilisée. Ce problème a fait l'objet de plusieurs études ce qui a permis de trouver certains résultats pour quelques classes d'arbres.

Dans un deuxième temps, nous avons utilisé fréquemment la notion de la $C_n$-valuation pour déterminer les dimensions de certaines classes d'arbres. Nous avons aussi introduit trois nouvelles classes d'arbres obtenus à partir de l'arbre binaire complet, dont les éléments sont : $R_n$, $M_n$ et $H_n$ ayant respectivement les dimensions suivantes : n+2, n+3 et n+3.

## Références

1. C. Berge. Graphes, Dunod éditions. Paris(1984)
2. J.Arfati ,C.H.Papadimitriou and P. Papageorgiou "the complexity of cubical graphs" proceedings of 11 th international Kolloquium on automata , languages and programming. Pages 51-57, 1984
3. I. Havel "On hamiltonian circuits and spanning trees of hypercubes" Cas prest. Mat 109(1984) 135-152
4. V. Firsov "On isometric embeddings of graph into a boolean cube" cyber - netics 1, pages 112-113,1965.
5. L. Nebesky "Embedding m-quasistars into n-cubes" C zechoslovak mathematical, journal, praha,38 (113),1988.
6. D.G. Corneil and A. Wagner "Embeding trees in a hypercube is NP- complet" siam j. comput 19 (1990),570-590.

7. A. Berrachedi et M. Nekri " Trees embedable in hypercubes " à paraître dans la revue RAIRO.
8. I. Havel and P. Liebel "One legged caterpillars spans hypercubes" Journal of graph theory vol 10 (1986) 69-77.
9. F. Harary , M. Lewinter and W. Widolski "On two legged caterpillars which span a hypercube" Congr. Numer. 66 (1988) pp 103-108.
10. S. Bezrukov and B. Monien ,W.Unger,and G.Wechsung "Embedding ladders and caterpillars into hypercube" discrete applied mathematics , (83) : 21-29 , 1992.
11. R.Caha and V.Koubek. "Spanning regular caterpillars in hypercubes" Europ. J.combinatorics (1997)18,249-266.
12. T.Dvorak , I Havel , J..M. Laborde ,and M.Mollard "Spanning caterpillars of a hypercube" journal of Graph theory , 24 (1) 9-19,1997.
13. I. Havel and J .Moravek "B-valuation of graphs " Czech- Math .jour ., 22(1972),338-351.
14. M. kobeissi and M .Mollard "Spanning graphs of hypercubes :starlike and double starlike trees" Accepté à discrete Math.