Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 3, 2005, pp. 45 - 51

7

Estimations de la stabilité forte des chaînes de Markov.

B. RABTA

LA.M.O.S., Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des systèmes,
Université de Béjaia, Targa Ouzemour -06000- Béjaia (Algérie).

Résumé Dans ce travail, nous présentons des estimations quantitatives de l'erreur relative commise sur la distribution stationnaire d'une chaîne de Markov fortement $v-$stable après une petite perturbation de son noyau de transition. Nous présentons, également, des estimations de l'erreur absolue commise sur les probabilités stationnaires individuelles d'une chaîne de Markov discrète irréductible fortement $v-$stable. Une application à un modèle de gestion des stocks de type (R, s, S) a été appliquée.

Mots-clés : Chaîne de Markov, Stabilité forte, Perturbation, Erreur relative, Erreur absolue, gestion des stocks.

7.1 Introduction

Dans la modélisation des problèmes pratiques, on est souvent amené à remplacer le système réel, généralement très compliqué, par un autre système (idéal) qui lui est proche dans un certain sens mais qui est plus simple en structure et/ou en composantes. Cela est dicté par le fait que le système réel ne peut pas être analysé ou que son analyse débouche sur des formules compliquées qui ne peuvent pas être exploitées en pratique. A cela s'ajoute le fait que les paramètres sont généralement déterminés d'une manière imprécise, car obtenus par des méthodes statistiques. De telles circonstances nous suggèrent de rechercher les propriétés qualitatives du système réel, i.e., la manière de laquelle ce dernier est affecté par les changements de ses paramètres. Les propriétés qualitatives importantes des modèles stochastiques sont l'invariance, la monotonie et la stabilité [7]. C'est par le biais des propriétés qualitatives que des bornes peuvent être obtenues mathématiquement et que des approximations peuvent être faites rigoureusement. Plusieurs méthodes ont été élaborées pour l'investigation de la stabilité des chaînes de Markov. Certaines permettent l'obtention d'estimations quantitatives en plus de l'affirmation qualitative de la stabilité. Pour la plupart ces méthodes, l'estimation obtenue est de la forme :

$$\|\pi - \nu\| \leq C(P)\|P - Q\|.$$

avec une définition particulière de la norme $\|.\|$. Cette estimation ne permet pas de mesurer la qualité de l'approximation car il faudra la comparer à une valeur de référence certes.

De plus, la formule ci-dessus ne permet pas d'avoir une idée sur l'erreur commise sur les probabilités stationnaires individuelles d'une chaîne de Markov discrète. La méthode de stabilité uniforme [3] répond à ces questions mais se limite au cas d'une chaîne de Markov irréductible finie. Cette méthode présente des estimations de la forme :

$$|\pi_k - \nu_k| \leq C(P)\|P - Q\|.$$

L'article de Cho et Mayer [2] présente et compare plusieurs bornes de cette forme. Cette méthode permet également d'avoir des estimations sur l'erreur relative sous la forme (voir [3]) :

$$\frac{|\pi_k - \nu_k|}{|\pi_k|} \leq C(P)\|P - Q\|.$$

Sur la base des résultats obtenus pour la méthode de stabilité forte [1, 4], nous présentons dans ce travail des estimations quantitatives de l'erreur relative commise sur la distribution stationnaire d'une chaîne de Markov fortement stable après une perturbation de son noyau de transition. Nous présentons, également, une estimation de l'erreur absolue commise sur les probabilités stationnaires individuelle d'une chaîne de Markov discrète irréductible. Nous appliquons les résultats obtenus à un modèle de gestion des stocks de type (R, s, S).

7.2 Critère de stabilité forte

Soit $X = (X_t, t \geq 0)$, une chaîne de Markov homogène à valeurs dans un espace mesurable $(\mathbf{E}, \mathcal{E})$, (où l'on suppose que la σ-algèbre $\mathcal{E}$ est dénombrablement engendrée), donnée par un noyau de transition régulier $\mathbf{P}(x, A)$, $x \in \mathbf{E}$, $A \in \mathcal{E}$ et admettant une probabilité invariante unique π.

Notons $m\mathcal{E}$ $(m\mathcal{E}^+)$ l'espace des mesures finies (non négatives) sur $\mathcal{E}$, $f\mathcal{E}$ $(f\mathcal{E}^+)$ l'espace des fonctions mesurables bornées (non négatives) sur $\mathbf{E}$. Soit v une fonction mesurable bornée inférieurement par une constante positive, (pas nécessairement finie) sur $\mathbf{E}$ et soit

$$\theta = \inf_{x \in E} v(x).$$

On introduit dans $m\mathcal{E}$, la famille spéciale de normes de la forme

$$\|\mu\|_v = \int_{\mathbf{E}} v(x)|\mu|(dx), \forall \mu \in m\mathcal{E} \tag{7.1}$$

où $|\mu|$ est la variation de la mesure μ.

On considère, dans l'espace $m\mathcal{E}$, l'espace de Banach $\mathcal{M} = \{\mu \in (m\mathcal{E}) : \|\mu\|_v < \infty\}$ et $\mathcal{M}^+ = \mathcal{M} \cap (m\mathcal{E}^+)$.

Alors, Les normes induites sur les espaces $f\mathcal{E}$ et $\mathcal{M}$ auront les formes suivantes :

$$\|\mathbf{P}\|_v = \sup\{\|\mu\mathbf{P}\|_v, \|\mu\|_v \leq 1\} = \sup_{x\in\mathbf{E}} (v(x))^{-1} \int_{\mathbf{E}} |\mathbf{P}(x,dy)|v(y), \tag{7.2}$$

$$\|f\|_v = \sup\{|\mu f|, \|\mu\|_v \leq 1\} \quad = \sup_{x\in\mathbf{E}} (v(x))^{-1} |f(x)|. \tag{7.3}$$

On associe à chaque noyau de transition $\mathbf{P}(x, A)$ appartenant à l'espace des opérateurs linéaires bornés, les applications linéaires $\mathcal{L}_{\mathbf{P}} : m\mathcal{E} \to m\mathcal{E}$ et $\mathcal{L}^*_{\mathbf{P}} : f\mathcal{E} \to f\mathcal{E}$, dont les valeurs pour $\mu \in m\mathcal{E}$ et $f \in f\mathcal{E}$ sont respectivement :

$$\mu\mathbf{P}(A) = \mathcal{L}_{\mathbf{P}}(\mu)(A) = \int_{\mathbf{E}} \mu(dx)\mathbf{P}(x,A), \quad \forall A \in \mathcal{E},$$
$$\mathbf{P}f(x) = \mathcal{L}^*_{\mathbf{P}}(f)(x) = \int_{\mathbf{E}} \mathbf{P}(x,dy)f(y), \quad \forall x \in \mathbf{E}.$$

et à chaque fonction $f \in f\mathcal{E}$, on associe la fonctionnelle linéaire $f : \mu \to \mu f$ telle que :

$$\mu f = \int_{\mathbf{E}} \mu(dx)f(x),$$

Pour $\mu \in m\mathcal{E}$ et $f \in f\mathcal{E}, f \circ \mu$ désignera le noyau de transition de la forme :

$$f(x)\mu(A), x \in \mathbf{E}, A \in \mathcal{E}.$$

Définition 7.1 ***(cf. [1])*** *On dit que la chaîne de Markov X vérifiant $\|\mathbf{P}\|_v < \infty$ est fortement $v-$stable, si chaque noyau stochastique $\mathbf{Q}$ dans un certain voisinage $\{\mathbf{Q} : \|\mathbf{Q} - \mathbf{P}\|_v < \epsilon\}$ admet une probabilité stationnaire unique ν et :*

$$\|\nu - \pi\|_v \longrightarrow 0 \quad \textit{quand} \quad \|\mathbf{Q} - \mathbf{P}\|_v \longrightarrow 0.$$

Le résultat suivant donne des conditions suffisantes de la $v-$stabilité forte d'une chaîne de Markov récurrente au sens de Harris.

Théorème 7.1 ***(cf. [1])*** *Pour que la chaîne de Markov X récurrente au sens de Harris et vérifiant $\|\mathbf{P}\|_v < \infty$ soit fortement v-stable, il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :*

1. *$\exists\alpha \in \mathcal{M}^+, \exists h \in f\mathcal{E}^+$ telles que : $\pi h > 0$, $\alpha 1\!\!1 = 1$, $\alpha h > 0$,*
2. *Le noyau $T = \mathbf{P} - h \circ \alpha$ est non négatif,*
3. *$\exists\ \rho < 1$ tel que, $Tv(x) \ \leq \ \rho\ v(x), \forall x \in \mathbf{E}$.*

où $1\!\!1$ est la fonction identiquement égale à 1.

La possibilité d'obtenir des inégalités avec un calcul exact des constantes est la particularité de la méthode de stabilité forte.

Théorème 7.2 ***(cf. [4])*** *Sous les conditions du théorème 7.1 et pour Δ vérifiant la condition $\|\Delta\|_v < C^{-1}(1-\rho)$, on a :*

$$\|\nu - \pi\|_v \ \leq \|\Delta\|_v \ \|\pi\|_v \ C \ \ (1 - \rho - C \ \|\Delta\|_v)^{-1} \,, \tag{7.4}$$

où

$$C = 1 + \| \ \mathbb{1} \ \|_v \ \|\pi\|_v$$

et

$$\|\pi\|_v \leq (\alpha v)(1-\rho)^{-1}(\pi h)$$

7.3 Estimation de l'erreur relative

Le résultat suivant donne une estimation de l'erreur relative. Ce qui permet de mesurer la grandeur de la déviation de la distribution stationnaire de la chaîne perturbée par rapport à la norme de la mesure stationnaire.

Théorème 7.3 *Sous les conditions du théorème 7.1 et pour Δ vérifiant la condition $\|\Delta\|_v < C^{-1}(1-\rho)$, on a :*

$$\frac{\|\nu - \pi\|_v}{\|\pi\|_v} \ \leq \|\Delta\|_v C \,(1 - \rho - C \ \|\Delta\|_v)^{-1} \,, \tag{7.5}$$

On a :

$$\|\pi\|_v = \int_E \pi(dx) v(x) \geq \theta \int_E \pi(dx) = \theta \neq 0.$$

D'après le théorème 7.2 on a :

$$\|\nu - \pi\|_v \ \leq \|\Delta\|_v \ \|\pi\|_v \ C \ \ (1 - \rho - C \ \|\Delta\|_v)^{-1} \,.$$

Par suite,

$$\frac{\|\nu - \pi\|_v}{\|\pi\|_v} \leq \|\Delta\|_v C \,(1 - \rho - C \ \|\Delta\|_v)^{-1} \,.$$

7.4 Estimation de la déviation des probabilités stationnaires individuelles

Considérons maintenant le cas d'une chaîne de Markov discrète irréductible (définie par une matrice de transition). Les estimations précédentes ne permettent pas d'avoir une idée sur l'erreur commise individuellement sur l'une des probabilités stationnaires de la chaîne de Markov perturbée. Nous proposons alors, ce résultat :

Théorème 7.4 *Sous les conditions du théorème 7.1 et pour Δ vérifiant la condition $\|\Delta\|_v < C^{-1}(1-\rho)$, on a :*

$$|\pi_k - \nu_k| \leq \frac{\|\Delta\|_v \|\pi\|_v C}{v(k)\,(1-\rho-C\ \|\Delta\|_v)}, \tag{7.6}$$

pour tout $k \in E$.

Soit $k \in E$,

$$v(k)|\pi_k - \nu_k| \leq \sum_{i \in E} v(i)|\pi_i - \nu_i| = \|\pi - \nu\|_v \leq \frac{\|\Delta\|_v\ \|\pi\|_v\ C}{(1-\rho-C\ \|\Delta\|_v)}.$$

Donc,

$$|\pi_k - \nu_k| \leq \frac{\|\Delta\|_v \|\pi\|_v C}{v(k)\,(1-\rho-C\ \|\Delta\|_v)}.$$

7.5 Application à un modèle de gestion des stocks

Considérons le problème de gestion des stocks mono-article mono-échelon de type (R, s, S) suivant. l'état du stock X_n est inspecté aux dates $t_n = nR$ $(n \geq 1)$. Si le niveau du stock X_n est inférieur ou égal à s, on passe une commande pour ramener le stock au niveau S. On suppose que les commandes arrivent immédiatement. Les demandes successives ξ_n, $n \geq 1$, sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi commune

$$a_k = P(\xi_1 = k),\ \ k = 0, 1, 2, ...$$

a_k représente alors la probabilité d'avoir une demande de k articles durant la période.

Soit $X = \{X_n,\ n \geq 0\}$ la chaîne de Markov représentant le niveau du stock en main à la date $t_n = nR$.

Considérons un autre modèle identique en structure, sauf que les demandes ξ'_n sont de loi :

$$a'_k = P(\xi'_1 = k), \quad k = 0, 1, ...$$

Soit $(X'_n)_{n\geq 0}$ la chaîne de Markov représentant le niveau du stock en main à la date $t_n = nR$ dans Σ'. Soit P et Q les opérateurs de transition des chaînes de Markov X et X' respectivement.

7.5.1 Stabilité forte de la chaîne X

Théorème 7.5 *(cf. [6]) La chaîne de Markov $X = \{X_n, n \geq 0\}$, est fortement $v-$stable pour une fonction $v(k) = \beta^k$ pour tout $\beta > 1$.*

La constante ρ étant égale à :

$$\rho = \frac{\sum_{i=s+1}^{\infty} a_i}{\beta^{s+1}} + \sum_{i=0}^{s} a_i \beta^{-i}. \tag{7.7}$$

7.5.2 Déviation de l'opérateur de transition

Le système de gestion des stocks considéré est fortement $v-$stable. Ces caractéristiques peuvent approcher celles d'un autre modèle identique en structure sauf en distribution des demandes si les lois de demandes des deux systèmes sont proches dans un certain sens. La proximité des deux lois sera mesurée par la mesure

$$W = \sum_{i=S}^{\infty} |a_i - a_i'| + \sum_{i=0}^{S-1} |a_i - a_i'| \, \beta^{S-i} \tag{7.8}$$

Pour pouvoir estimer numériquement l'écart entre les distributions stationnaires des chaînes X et X', estimons d'abord la déviation du noyau de transition de la chaîne X par rapport à celui de la chaîne X'. On a alors

Lemme 7.1. (cf. [5]) Soit P (resp. Q) le noyau de transition de la chaîne de Markov X (resp. X'). Alors

$$\|P - Q\|_v \leq W$$

7.5.3 Inégalités de stabilité

Les inégalités de stabilité donnent une estimation de l'écart entre les distributions stationnaires des chaînes de Markov X et X'. Estimons d'abord $\|\pi\|_v$.

Lemme 7.2. (cf. [5]) Soit

$$\gamma = \frac{\left(\sum_{i=S}^{\infty} a_i + \sum_{i=0}^{S-1} a_i \beta^{S-i}\right)}{(1-\rho)(1 + H(S-s))} \tag{7.9}$$

où ρ est donné par (7.7) et $H = \sum_{n=1}^{\infty} F_{\xi}^{n*}$ est la fonction de renouvellement associée à la fonction de répartition F_ξ de la variable aléatoire ξ_1. Alors

$$\|\pi\|_v \leq \gamma$$

Théorème 7.6 *(cf. [5]) Soit π et ν les distributions stationnaires des chaînes de Markov X et X' respectivement. Alors, sous la condition $W < \frac{1-\rho}{1+\gamma}$ on a*

$$\|\pi - \nu\|_v \leq \frac{W\gamma\,(1+\gamma)}{1-\rho-(1+\gamma)W} \tag{7.10}$$

où ρ est donné par (7.7) et γ par (7.9).

Théorème 7.7 *Soit π et ν les distributions stationnaires des chaînes de Markov X et X' respectivement. Alors, sous la condition*

$$\|P - Q\|_v = W < \frac{1-\rho}{1+\gamma} \tag{7.11}$$

on a

$$\frac{\|\pi - \nu\|_v}{\|\pi\|_v} \leq \frac{W(1+\gamma)}{1-\rho-(1+\gamma)W} \tag{7.12}$$

où ρ est donné par (7.7) et γ par (7.9).

Appliquer le théorème 7.3 et suivre la démarche de la preuve du théorème 7.6 pour le calcul des constantes.

Théorème 7.8 *Soit π et ν les distributions stationnaires des chaînes de Markov X et X' respectivement. Alors, sous la condition*

$$\|P - Q\|_v = W < \frac{1-\rho}{1+\gamma} \tag{7.13}$$

on a

$$|\pi_k - \nu_k| \leq \frac{W\gamma(1+\gamma)}{\beta^k(1-\rho-(1+\gamma)W)} \tag{7.14}$$

pour tout $k \in E$. Avec ρ donné par (7.7) et γ par (7.9).

Appliquer le théorème 7.4.

Références

1. D. Aïssani and N.V. Kartashov. Ergodicity and stability of Markov chains with respect to operator topology in the space of transition kernels. *Dokl. Akad. Nauk. Ukr. SSR, ser. A*, 11 :3–5, 1983.
2. G. Cho and C.D. Mayer. Comparaison of perturbation bounds for the stationary probabilities of a finite markov chain. *Linear Algebra and its Applications*, 335 :137–150, 2001.
3. I. Ipsen and C.D. Meyer. Uniform stability of markov chains. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 15(4) :1061–1074, 1994.
4. N.V. Kartashov. Strong stability of Markov chains. *VNISSI, Vsesayouzni Seminar on Stability Problems for stochastic Models, Moscow*, pages 54–59, 1981.
5. B. Rabta and D. Aïssani. Estimate of the strong stability in an (R, s, S) inventory model. *Proceedings of the XXIII Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, Pamplona (Spain)*, page 94, 2003.
6. B. Rabta and D. Aïssani. Stability analysis in an inventory model. *Theory of Stochastic Processes*, 10(26) :129–136, 2004.
7. D. Stoyan. *Comparaison Methods for Queues and Other Stochastic Models.* English translation, D.J. Daley, Editor (J. Wiley and Sons, New York, 1983.