Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 3, 2005, pp. 27 - 31

5

Analyse du modèle M/G/1 avec rappels linéaires et vacances

M. BOUALEM[1]

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS
Université de Béjaïa 06000, Algerie.
email : robertt15dz@yahoo.fr

Résumé Dans ce travail, nous nous intéressons à l'étude du modèle d'attente $M/G/1$ avec rappels linéaires et vacances exhaustives du serveur. Particulièrement, nous avons obtenu les probabilités stationnaires se forment de fonctions génératrices, quelques mesures de performance ainsi que la condition d'ergodicité du modèle considéré en utilisant la méthode des variables supplémentaires.

Mots clés : Modèles d'attente avec rappels, vacances, fonctions génératrices, variables supplémentaires.

La plupart des travaux sur les modèles classiques traitent des systèmes dans lesquels le serveur reste oisif quand la file d'attente est vide. Cependant, le temps d'oisiveté du serveur pourrait être utilisé pour un travail secondaire dans le but d'améliorer la performance du système.
Ces situations d'attente peuvent être étudiées par des modèles d'attente avec vacances. Dans un tel modèle, le serveur prend occasionnellement une vacance d'une durée aléatoire, qui peut être utilisée pour accomplir une ou plusieurs tâches secondaires.
Par exemple, les processeurs dans les systèmes informatiques et les systèmes de communication exécutent en plus de leurs fonctions primaires des tâches de tests et de maintenance préventive qui permettent principalement de préserver le système contre les pannes et de prévoir une haute fiabilité de celui-ci. Ces périodes peuvent aussi être considérées comme des vacances Doshi [1].
Ce modèle a été largement étudié et appliqué à divers problèmes dans l'analyse des systèmes informatiques, des systèmes de communication et de production ...

On peut définir les rappels linéaires de la manière suivante : La discipline d'accès au serveur à partir de l'orbite est gouvernée par une loi exponentielle avec l'intensité linéaire $\lambda(1 - \delta_{0j}) + j\theta$, lorsque le nombre de clients en orbite est j de N et δ_{0j} est la fonction de Kronecker. Le premier terme correspond aux rappels constants [traités par Artalejo [2], le second est le cas à étudier. Ici, les rappels sont linéaires dans le sens que l'intensité globale des rappels est proportionnelle au nombre de clients en orbite.

5.1 Description du modèle [2]

On considère un système de files d'attente à un seul serveur où les clients primaires arrivent suivant un flux poissonnien de taux λ. Un client qui arrive et trouve le serveur occupé, quitte l'aire du service pour rejoindre un groupe de clients bloqués appelés " *orbite*". Après un certain temps aléatoire, il renouvelle sa tentative d'entrer en service, une fois, deux fois, ..., jusqu'à ce qui'il le trouve disponible. Les intervalles de temps inter-rappels suivent une distribution exponentielle de taux θ. Comme cette politique de rappel dépend du nombre de clients dans l'orbite, on l'appelle politique de rappel linéaire. Les temps de service sont supposés d'une loi arbitraire, de fonction de distribution $B(t)$ et de moyenne finie $\frac{1}{r}$.
Tous les clients entrant dans le système sont servis d'une manière continue et dans un ordre indépendant de leur temps de service. De plus, on suppose que le serveur prend une vacance chaque fois que le système devient vide .

L'état du système à l'instant t peut être décrit par le processus :

$$X(t) = (C(t), N_o(t), \xi(t))$$

$$C(t) = \begin{cases} 0, \text{ si le serveur est oisif}\,; \\ 1, \text{ si le serveur est occupé}\,; \\ 2, \text{ si le serveur est en vacance.} \end{cases}$$

$N_o(t)$: le nombre de client dans l'orbite à l'instant t.
$C(t) = 1$ (alternativement $C(t) = 2$), alors $\xi(t)$ représente le temps de service écoulé du client en service (respectivement, le temps de la vacance écoulé).
$B(x)$ suit une distribution générale.

Soit $\{\zeta_n, n \in \mathbb{N}\}$ une suite d'instants de la complétion d'un service ou bien de la fin d'une vacance propre.
La séquence des vecteurs aléatoires $Y_n = \{C(\zeta_n^-), N(\zeta_n^+)\}$ forme une chaîne de Markov, qui est une chaîne de Markov incluse pour notre système de files d'attente.
Son espace d'état est $S = \{1, 2\} * \mathbb{N}$.
Les états de transitions sont donnés par :

$$(i_{n+1}, j_{n+1}) = \begin{cases} (2, X), & \text{if } j_n = 0; \\ (1, j_n - \delta_{j_n} + v_{n+1}), & \text{if } j_n > 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Où
X : le nombre de clients qui arrivent durant une vacance.
v_{n+1} : le nombre de clients qui arrivent pendant un temps de service qui se termine à l'instant ζ_{n+1}.
δ_{j_n} est la variable de Bernoulli

Les probabilités de transition en un pas de la chaîne de Markov induite sont données par les formules suivantes :
Si $C(\zeta_{n+1}^-) = 1$

$$\begin{aligned} r_{km} &= P(j_{n+1} = m/j_n = k) \\ &= k_{m-k}\frac{\lambda}{\lambda + k\theta}[P(1, j_n = k) + P(2, j_n = k)] + k_{m-k+1}\frac{k\theta}{\lambda + k\theta}[P(1, j_n = k) + P(2, j_n = k)] \end{aligned} \tag{5.2}$$

Si $C(\zeta_{n+1}^-) = 2$

$$r_{km} = P(X = m)P(i_n = 1, j_n = 0) + P(X = m)P(2, j_n = 0) = P(X = m)(\pi_{1,0} + \pi_{2,0}) \qquad m \geq 0$$

5.2 Condition d'ergodicité

La chaîne de Markov incluse est ergodique si et seulement si : $\rho = \frac{\lambda}{r} < 1$.

5.3 Distributions stationnaires de la chaîne induite

$\pi_{i,j} = \lim_{n \to \infty} P(y_n = (i, j)) \qquad (i, j) \in S$
D'après (5.2), on a :

$$\pi_{1,m} = (1 - \delta_{mo}) \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda}{\lambda + k\theta} k_{m-k}(\pi_{1,k} + \pi_{2,k}) + \sum_{k=1}^{m+1} \frac{k\theta}{\lambda + k\theta} k_{m-k+1}(\pi_{1,k} + \pi_{2,k})$$

$$\pi_{2,m} = P(X = m)(\pi_{1,0} + \pi_{2,0}) \qquad m \geq 0$$

Soient les fonctions génératrices

$$\pi_1(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \pi_{1,m} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda + k\theta}(\pi_{1,k} + \pi_{2,k})K(z)z^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\theta}{\lambda + k\theta}(\pi_{1,k} + \pi_{2,k})K(z)z^{k-1} \tag{5.3}$$

$$\pi_2(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \pi_{2,m} = \beta\chi(z) \tag{5.4}$$

où :

$\beta = \pi_{1,0} + \pi_{2,0}$ et $\chi(z)$ est la fonction génératrice de de la variable X.

Posant :

$$L_1(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \frac{\pi_{1,m}}{\lambda+m\theta} \qquad L_2(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \frac{\pi_{2,m}}{\lambda+m\theta}$$

D'après (5.3) :

$$\pi_1(z) = K(z)[\frac{\lambda}{z}(L_1(z) + L_2(z)) + \theta(L_1^{'}(z) + L_2^{'}(z))] \tag{5.5}$$

D'après (5.4)

$$\pi_2(z) = \beta\chi(z) \tag{5.6}$$

Définissant :

$$\pi_1(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \pi_{1,m} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda + m\theta}{\lambda + m\theta} z^m \pi_{1,m} = \lambda L_1(z) + \theta z L_1^{'}(z)$$

$$\pi_2(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda + m\theta}{\lambda + m\theta} \pi_{2,m} z^m = \lambda L_2(z) + \theta z L_2^{'}(z) \tag{5.7}$$

(5.5) et (5.7) donnent :

$$L_1^{'}(z) = \frac{\lambda[z - K(z)]}{\theta z[K(z) - z]} L_1(z) - \frac{K(z)[\lambda L_2(z) + \theta z L_2^{'}(z)]}{\theta z[K(z) - z]}$$

En utilisant (5.7) et (5.6)

$$L_1^{'}(z) = \frac{\lambda[z - K(z)]L_1(z) - K(z)\beta\chi(z)}{\theta z[K(z) - z]}$$

D'après (5.7)

$$\pi_1(z) = \lambda L_1(z) + \theta z \frac{\lambda[z - K(z)]L_1(z) - \beta K(z)\chi(z)}{\theta z[K(z) - z]} = \frac{\beta K(z)\chi(z)}{z - K(z)} \tag{5.8}$$

5.4 Conclusion

Dans ce travail, nous avons montré, dans un premier temps, l'intérêt et les applications des modèles d'attente avec rappels et vacances. Dans un deuxième temps, nous avons établi les probabilités de transition, la condition d'ergodicité et les distributions stationnaires associé au modèle M/G/1 avec rappels linéaires et vacances du serveur.

Cette étude et celle effectuée par Artalejo [2] constituent une analyse complète des rappels linéaires dans le cas de ces systèmes d'attente.

Références

1. B.T. Doshi. Single server queues with vacations. *Stochastic Analysis of Computer and Communications Systems. Ed. H. Takagi, Elsevier Amsterdam.* , 1990.
2. J.R. Artalejo. Analysis of an M/G/1 queue with constant repeated attempts and server vacations . *Computers and Operations Research* , 24 :493–504, 1997.