Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 3, 2005, pp. 23 - 26

4

Sur la Discrétisation des Processus Décrivant les Systèmes Non Fiables

K. ABBAS[1]

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS
Université de Béjaïa 06000, Algerie.
email : `karabbas2003@yahoo.fr`

Résumé Dans ce travail, on a effectué une analyse Markoviènne d'un modèle de files d'attente avec pannes et réparation, et ceci dans l'objectif de concevoir un algorithme décrivant une succession de périodes de pannes et de disponibilité et l'évolution résultante de la file. L'intérêt théorique principal de ce travail consiste à démontrer que la méthode des variables supplémentaires est l'approche la plus commode pour l'analyse de ce type de modèles, surtout quand les pannes ont une structure complexe.

Mots clés : Les modèles d'attente avec pannes et réparation ; Méthode de la variable supplémentaire ; Chaîne de Markov induite ; Algorithme.

Dans ce travail, une analyse Markoviènne d'un système de files d'attente avec pannes a été faite, et ceci dans le sens d'un algorithme décrivant une succession de périodes de pannes et de disponibilité et l'évolution résultante de la file. L'intérêt théorique principal de ce travail consiste à démontrer que la méthode des variables supplémentaires est l'approche la plus commode pour l'analyse d'un tel système, surtout quand les pannes ont une structure complexe (l'approche usuelle étant la théorie regénerative [3]).

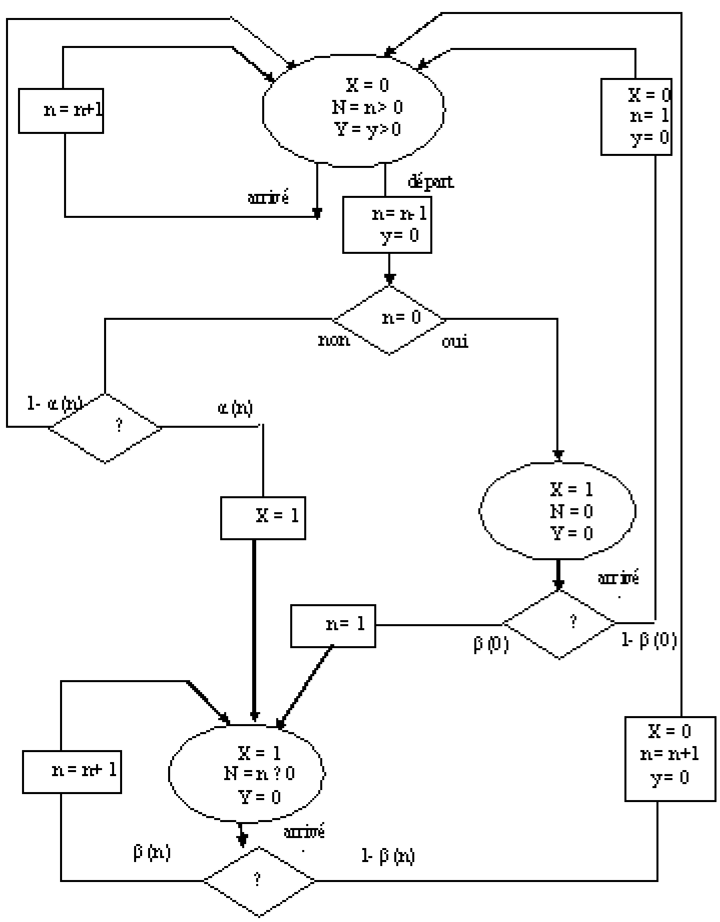
4.1 Analyse de la file $M/G/1$ avec pannes

Dans cette étude, nous supposons que le processus des arrivées de clients est Poissonnien et que le service dont requièrent est une variable aléatoire indépendante du fonction de distribution arbitraire possédant une densité.
L'algorithme de ce système de file d'attente décrit l'évolution de vecteur d'état (X, N, Y) où $N \in \mathbb{N}$ est le nombre de clients dans la file et (X, Y) sont deux variables d'état supplémentaires. $X \in \{0, 1\}$ décrit les propriétés globales (le bon ou le mouvais comportement) de la file et Y est la quantité du service déjà reçu par le client qui est entraîne d'être servi dans le système (0 si la file est vide).

Lorsque le nombre de clients est ≥ 1 et $Y > 0$ la file sera dite en état $X = 0$ [bon comportement]. Elle se comporte exactement comme la file $M/G/1$ classique : L'occurrence des arrivées est un processus Poissonnien de taux λ, alors que N doit être croître durant la période de service. Les départs également peuvent avoir lieu (avec un taux infinitésimal $\sigma(Y) = s(Y)/1 - S(Y))$ si $Y = y$, S et s étant respectivement la fonction de distribution et la densité de temps du service. A chaque instant de départ N est diminué par un et Y devient 0. Si N est différent de 0 (lorsqu'il est diminué par un), le système peut être dans l'un des deux états possibles :

- Le premier est de rester à l'état $X = 0$, dans lequel il commence à servir au moins un de ces clients en attente,
- ou de faire un saut à l'état $X = 1$, dans lequel une période de panne sera commencée durant laquelle aucun service ne peut être fourni à aucun client.

4.1.1 Algorithme



4.2 Ergodicité du système

Nous supposons que les fonctions $\alpha(n)$ et $\beta(n)$ ont de limites quand $n \to \infty$. Notons ces limites $\widetilde{\alpha}$ et $\widetilde{\beta}$ respectivement. Nous définissons aussi :

$$\widetilde{\alpha} = \sup_{n \geq 1} \alpha(n) \text{ et } \widetilde{\beta} = \sup_{n \geq 0} \beta(n).$$

Le processus décrivant ce système
$\{Z_t = (X_t, N_t, Y_t), t \in \mathbb{R}^+\}$ est un processus Markovien d'espace d'état $\{0, 1\} \times \mathbb{N} \times \mathbb{R}^+$.

Initialement nous montrons que la chaîne de Markov induite du processus Z_t est ergodique lorsque les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} 0 \leq \widetilde{\alpha} < 1 \\ 0 \leq \widetilde{\beta} < 1 \\ \widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta} < 1 \\ \rho \triangleq \frac{\lambda}{\mu} < 1 - \frac{\widetilde{\alpha}}{1 - \widetilde{\beta}} \end{cases} \tag{4.1}$$

Soit T_n le n-ième instant de saut du processus Markovien Z_t vers l'état $(0 \times \mathbb{N} \times \{0\})$. Soit N_n défini comme suit $Z_{T_n} = (0, N_n, \{0\})$. La propriété Markoviènne forte implique que N_n est une chaîne de Markov. $\{N_n, n \in \mathbb{N}\}$ a pour espace d'état $\mathbb{N}^*$. Cette chaîne est irréductible et apériodique.

Maintenant nous montrons que lorsque la condition (4.1) est satisfaite, la chaîne satisfait la condition suffisante d'ergodicité suivante (voir [2]) :

(i) $E[N_{i+1} - N_i / N_i = j] < \infty \quad \forall j \in \mathbb{N}$
(ii) $\lim_{j \to \infty} \sup E[N_{i+1} - N_i / N_i = j] < 0.$

Pour ceci, considérons l'expression suivante :

$$N_{i+1} - N_i = A_{]T_i, T_{i+1}]} - D_{]T_i, T_{i+1}]}$$

où $A_{]s,t]}$ (resp. $D_{]s,t]}$) est le nombre d'arrivées (resp. départs) dans l'intervalle $]s, t]$.

Nous avons :

$$E[D_{]T_i, T_{i+1}]}] = D_{]T_i, T_{i+1}]} = 1$$

$$E[A_{]T_i, T_{i+1}]} / N_i = j] = \rho +$$

$$\int_0^\infty ds(t) \sum_{n=0}^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \alpha(n+j-1)\phi(n+j-1)$$

où

$$\phi(j) = E[A_{]\theta,T_{i+1}]}/Z_\theta]$$
$$= \sum_{n=1}^\infty (\prod_{e=0}^{n-2} \beta(j+e))(1-\beta(j+n-1)).n$$

D'où

$$E[N_{i+1} - N_i/N_i = j] \leq \rho + \frac{\overline{\alpha}}{1-\overline{\beta}} + 1 < \infty$$

D'où la condition (i).

Nous avons aussi :

$$\exists \lim_{j\to\infty} E[N_{i+1} - N_i/N_i = j] = \rho + \frac{\overline{\alpha}}{1-\overline{\beta}} - 1$$

alors que (ii) est prouvée également lorsque $\rho < 1 - \frac{\overline{\alpha}}{1-\overline{\beta}}$.
Par suite, lorsque (4.1) est satisfaite, $\{N_n, n \in \mathbb{N}\}$ est ergodique. Son distribution converge vers une mesure stationnaire unique sur $\mathbb{N}^*$ qui ne dépend pas des conditions initiales. La convergence du la distribution de Z_t et l'indépendance des conditions initiales sont aussi conséquences du théorème limite sur des processus semi-regénératifs [1] ($\{Z_t, t \in \mathbb{R}^+\}$ peut être considéré comme un processus semi-regénératif avec un processus de renouvellement Markovien induit $\{N_n, T_n, n \in \mathbb{N}\}$). Il est clair que cette distribution limite sera une solution des équations de Kolmogorov.

Références

1. CINLAR A. *Introduction to stochastic processes.* Prentice Hall, 1975.
2. PAKES A. G. Some conditions pour ergodicity and recurrence of markov chains. *Op. Research*, 17 :1058–1061, 1969.
3. GAVER D. P. A waiting line with interrupted service. *J. Roy. Stat. Soc.*, 24, 1962.