Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 3, 2005, pp. 3 - 6

1

Sur le Jeux Non-Antagonistes Multicritères

M. S. RADJEF[1] et A.FERHAT[2]

email : radjefms@isima.fr, ferhat_ar@yahoo.fr
Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes LAMOS
Université de Béjaïa 06000, Algerie.

Résumé Depuis que Nash a introduit la notion d'équilibre pour les jeux non coopératifs sous forme stratégique, cet équilibre a été et est toujours étudié d'une manière extensive dans plusieurs directions. Quant aux jeux multicritères sous forme stratégique, ils ont été introduit pour la première fois par Blackwell (1956) et Shapley (1959), cependant, c'est grâce au développement de la théorie de l'optimisation multicritère que de nombreux chercheurs ont eu un regain d'intérêt pour les jeux multicritères. Dans ce papier, nous étudions les jeux coopératifs multicritères sous forme stratégiques sans transferts latéraux, nous nous intéressons principalement à un équilibre introduit par Aumann [5] pour les jeux coopératifs monocritères sous forme stratégiques, qui est l'équilibre fort de Nash.

Mots clés : Théorie des jeux, jeux multicritères, jeux non - antagonistes.

Depuis que Nash a introduit la notion d'équilibre pour les jeux non coopératifs sous forme stratégique, cet équilibre a été et est toujours étudié d'une manière extensive dans plusieurs directions. Quant aux jeux multicritères sous forme stratégique, ils ont été introduit pour la première fois par Blackwell (1956) et Shapley (1959), cependant, c'est grâce au développement de la théorie de l'optimisation multicritère que de nombreux chercheurs ont eu un regain d'intérêt pour les jeux multicritères [6, 7, 10, 11, 12, 13, 21].

Un autre domaine qui a un lien étroit avec la théorie de l'optimisation sont les inégalités variationnelles de laquelle sont tirés les problèmes d'équilibre. C'est Giannessi en 1980 [14] qui a par ailleurs généralisé les inégalités variationnelles au cas des fonctions vectorielles. Inspiré par l'étude des inégalités variationnelles vectorielles, d'autres contributions sont apparu, étendant les problèmes d'équilibre aux cas des systèmes de problèmes d'équilibre vectoriels [1, 2, 3, 4, 15, 22].

Au fil du temps, plusieurs techniques ont été mises au point pour étudier l'existence des équilibres dans la théorie des jeux. Parmi les plus connues, on cite les théorèmes du point fixe, l'inégalité de Ky Fan, l'élément maximal...etc. Il est connu que chaque théorème du point fixe lui correspond un théorème de l'élément maximal. Deguire et al. [8] ont donné un certain nombre de résultats concernant l'existence d'un élément maximal pour une famille de correspondances et dans [4], Ansari et al. ont étudié l'existence de solution pour un système de problèmes d'équilibre vectoriel généralisé en utilisant un résultat de Deguire [8]. Une autre application de l'élément maximal d'une famille de correspondances et des systèmes de problèmes d'équilibre vectoriels a été réalisé par Fahem [9]. L'auteur a démontré l'existence d'un équilibre de Berge dans le cas d'un jeu multicritère, et grâce à cette approche, l'auteur a pu affaiblir les conditions d'existence de l'équilibre de Berge dans le cas d'un jeu monocritère.

Dans ce papier, nous étudions les jeux coopératifs multicritères sous forme stratégiques sans transferts latéraux, nous nous intéressons principalement à un équilibre introduit par Aumann [5] pour les jeux coopératifs monocritères sous forme stratégiques, qui est l'équilibre fort de Nash. L'équilibre fort de Nash est Pareto faible, son étude n'est pas aisé, à part quelques exceptions, Aumann [5], Kalai, Postlewaite et Roberts [18], Peleg [20], Greenberg et Weber [16], Nishihara [19] et Ichiishi [17]. Nous généraliserons l'équilibre fort de Nash aux jeux multicritères et nous étudierons les conditions de son existence par l'approche de l'élément maximal. Nous ferons aussi la généralisation du Z-équilibre introduit par Zhukovskii [23] aux jeux multicritères et nous donnons un résultats sur son existence.

1.1 Position du problème

Une formulation d'un jeu multicritère sous forme stratégique à N-personnes associerait à chaque joueur i une fonction de gain vectorielle F_i définie sur un espace de stratégies X dans un espace vectoriel des gains Y_i de dimension $k(i)$. Dans la suite de ce mémoire, on notera par (J_M) le jeu multicritère sous forme stratégique noté comme suit :

$$J_M = \langle \mathcal{N},\ \{X_i\}_{i\in\mathcal{N}},\ \{F_i(.)\}_{i\in\mathcal{N}}\rangle$$

où $F_i(.) : X = \prod_{i\in\mathcal{N}} X_i \longrightarrow Y_i,\ i \in \mathcal{N} = \{1,\ldots,N\}$ est une fonction vectorielle telle que $F_i(.) = (F_{i1}(.),\ldots,F_{ik(i)}(.))$, avec $F_{ij} : X \longrightarrow,\ i \in \mathcal{N},\ j \in \{1,\ldots,k(i)\}$. Pour toute coalition non vide de joueurs $K \subset \mathcal{N}$, posons $X = \prod_{i\in\mathcal{N}} X_i$ et $X_K = \prod_{i\in K} X_i$, avec X_i est l'ensemble des décisions du joueur i, $X_i \subset^{n_i}$, $X = \prod_{i\in\mathcal{N}} X_i \subset^{n_1} \times^{n_2} \times \ldots \times^{n_N} =^{n}$.

Définition 1.1 On dira que $\bar{x} \in X$ est un *Zm-équilibre* du jeu (J_M) si :

1. pour tout $i \in \mathcal{N}$ et $y_i \in X_i$, il existe $x_{\mathcal{N}\setminus\{i\}} \in X_{\mathcal{N}\setminus\{i\}} :\ F_i(y_i,\ x_{\mathcal{N}\setminus\{i\}}) \not> F_i(\bar{x})$,
2. $\bar{x}$ est Pareto optimale pour les joueurs, *i.e.*

2a. pour tout $i \in \mathcal{N}$ et $x \in X$ $F_i(x) - F_i(\bar{x}) \notin^{k(i)}_{+} \setminus\{0_{k(i)}\}$, ou encore

2b. pour tout $x \in X$ $F_i(x) - F_i(\bar{x}) \not> 0_{k(i)},\ \forall i \in \mathcal{N}$.

On a le résultat suivant :

Théorème 1.1 Supposons que dans le jeu (J_M) on ait :

1. pour tout $i \in \mathcal{N}$, l'ensemble X_i est non vide et compact ;
2. pour tout $i \in \mathcal{N}$ et $j = \overline{1, k(i)}$, La fonction $x \longrightarrow F_{ij}(x)$ est continue sur X.

   Alors, le jeu (J_M) possède au moins un Zm-équilibre.

1.2 *C*-équilibre fort de Nash

Nous définissons l'équilibre Slater fort pour un jeu multicritère que nous appellerons *C-équilibre fort de Nash* car il constitue un cadre plus général qu'un jeu multicritère. Soit pour tout $x \in X$ et $i \in \mathcal{N}$, $C_i(x)$ un cône convexe fermé de Y_i tel que $intC_i(x) \neq \emptyset$.

Définition 2.1 On dira qu'une stratégie $\bar{x} \in X$ est un *C-équilibre fort de Nash*, si pour toute coalition $K \subset \mathcal{N}$, il n'existe pas de $y_K \in X_K$ tels que :

$$F_i(\bar{x}) - F_i(\bar{x}_{\mathcal{N}\setminus K},\ y_K) \in -intC_i(\bar{x}),\ \forall i \in K.$$

Si $C_i(x) =_+^{k(i)} = \{u = (u_1, \ldots, u_{k(i)}) \in^{k(i)}\ / \ u_j \geqq 0,\ \forall j = 1, \ldots, k(i)\}$ et $Y_i =^{k(i)}$
$\forall i = \overline{1, N},\ \forall x \in X$.
Alors, on aura la définition suivante :

Définition 2.2 Une stratégie $\bar{x} \in X$ est un *équilibre fort de Nash* du jeu (J_M), si pour toute coalition $K \subset \mathcal{N}$, il n'existe pas de $y_K \in X_K$ tels que

$$F_i(\bar{x}) - F_i(\bar{x}_{\mathcal{N}\setminus K},\ y_K) \in -int_+^{k(i)},\ \forall i \in K.$$

Théorème 2.1 Pour tout $i \in \mathcal{N}$, soit $F_i : X = \prod_{i \in \mathcal{N}} X_i \longrightarrow^{k(i)}$, supposons que :

1. pour tout $i \in \mathcal{N}$, X_i est un sous-ensemble non vide convexe et compact de ^{n_i},
2. pour tout $i \in \mathcal{N}$, F_i est continue et quasi-concave.

Alors, le jeu (J_M) possède un équilibre fort de Nash.

Pour le cas, où les fonctions de gains des joueurs sont scalaires, *i.e*
$F_i(.) : X \longrightarrow,\ \forall i \in \mathcal{N}$, alors du théorème 1.2, on déduit :

Théorème 2.2 Supposons que dans le jeu (J) on ait :

1. pour tout $i \in \mathcal{N}$, X_i est un sous-ensemble non vide convexe et compact d'un espace vectoriel topologique de Hausdorff ;
2. pour tout $i \in \mathcal{N}$, $F_i(.) : X \longrightarrow$ est continue et quasi-concave.

Alors le jeu (J) admet un équilibre fort de Nash.

Références

1. Ansari Q. H. *Vector Equilibrium Problems and Vector Variational Inequalities, Vector Variational Inequalities and Vector Equilibria : Mathematical Theories.* Edited by F Giannessi, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 2000.
2. Ansari Q. H., Konnov I. V. and Yao J.-C. On Generalized Vector Equilibrium Problems. *Nonlinear Analysis*, 47 :543–554, 2001.
3. Ansari Q. H., Schaible S. and Yao J. -C. The System of Vector Equilibrium Problems and Its Applications. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 107(3) :547–557, 2000.
4. Ansari Q.H., Schaible S. and Yao J.-C. The system of generalized vector equilibrium problems with applications. *Journal of Global Optimization*, 22 :3–16, 2002.
5. Aumann R. J. Acceptable point in general cooperative n-person game. *In : A. W. Tuker and R. D. Luce (eds). Contributions to the Theory of Games IV*, pages 287–324, 1959.
6. Bergstresser K. and Yu P. L. Domination structure and multicriteria problems in N-person games. *Theory Decision*, 8 :5–48, 1972.
7. Blackwell D. An Analog of the Minimax Theorem for Vector Payoffs. *Pacific Journal of Mathematics*, 6 :1–8, 1956.
8. Deguire P. , Tan K. K. , Yuan G. X. Z. The study of maximal elements, fixed points for L_S-majorized mappings and their applications to minimax and variational inequalities in product topological spaces. *Nonlinear analysis*, 37 :933–951, 1999.
9. Fahem K. Etude de Concepts de Solutions dans un Jeu Multicritère. Master's thesis, Université Mouloud MAMMERI de Tizi-Ouzou, novembre 2004.
10. Fernandez F. R. and Puerto J. Vector linear programming in zero-sum multicriteria matrix games. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 89 (2) :115–127, 1996.
11. Ghose D. *Multicriteria games with applications to two-target game problem.* PhD thesis, Dept of Electrical Enging, Indian Institute of Science, Bangalore, Indian, May 1989.
12. Ghose D. and Prasad U. R. Solution concepts in two-person multicriteria games. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 63 :167–189, 1989.
13. Ghose D. and Prasad U. R. Solution concepts in continuous-kernel multicriteria games. *J. Optimiz. Theory Applic.*, 69 :543–553, 1991.
14. Giannessi F. Theorems of alternative, quadratic programs and complementarity problems. *R.W.Cottle, F. Giannessi, J. L. Lions (Eds), Variational Inequality and Complementarity Problems*, pages 151–186, 1980.
15. Giannessi F. *Vector Variational Inequalities and Vector Equilibria : Mathematical Theories.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 2000.
16. Greenberg J. and Weber S. Stable coalition structures with a unidimensional set of alternatives. *Journal of Economic Theory*, 60 :62–82., 1993.
17. Ichiishi T. *Non-Cooperation and Cooperation In Games.* M. Deistler, E. Fürst, and G. Schwödiauer, Vienna, Economic Dynamics, and Time Series Analysis, Physica-Verlag edition, 1982.
18. Kalai E., Postlewaite A. and Roberts J. A Group Incentive Compatible Mechanism Yielding. *Journal of Economic Theory*, 20 :13–22, 1979.
19. Nishihara K. Stability of the cooperative equilibrium in N-person prisoners' dilemma with sequential moves. *Economic Theory*, 13 :483–494, 1999.
20. Peleg B. *Game Theoretic Analysis of Voting in Committees.* Cambridge Univ.Press, London, 1984.
21. Shashishekhap N., Ghose D., Anand L. and Prasad U.R. A survey of solution concepts in multicriteria games. *J. Indian Inst. Sci.*, 75 :141–174, 1995.
22. Tan N. X., and Tinh P. N. On the Existence of Equilibrium Points of Vector Functions. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 19 :141–156, 1998.
23. Zhukovskii V. I. *Introduction aux jeux différentiels avec Indétermination.* Institut international des problèmes de gestion et de la recherche scientifique, Moscou, 1997.