Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 20, 2021, pp. 3 - 20

1

Optimisation du plan de production au niveau de l'entreprise Danone Djurdjura Algérie

Medjkoune M., Remila K. et Aïssani D.

lamos_bejaia@hotmail.com.

Résumé L'entreprise Danone Djurdjura se fixe plusieurs objectifs, chacun d'eux ayant une priorité avec un niveau d'aspiration souhaité. Ces objectifs se résument à :

- maximiser le profit,
- satisfaire la demande,
- maximiser la production.

L'objectif principal de ce travail est de réaliser un planning journalier de production afin d'assurer une planification optimale. En effet, il est essentiel de savoir ce qu'il faut produire et quelle quantité produire, en raison :

- du manque de matières premières,
- de la sous-utilisation des capacités des machines installées, d'où une productivité trop faible.

Key words: Plan optimal, Optimisation multiobjectif, Programmation de but, Variables de déviation.

Introduction

La nécessité de pouvoir produire à un prix concurrentiel des biens et services de plus haute qualité et la nécessité d'avoir des systèmes de production de plus en plus flexibles, pouvant fournir des produits qui répondent aux exigences variables du client ou du consommateur moderne, exercent une pression très importante sur les gestionnaires d'industrie.

Pour faire face à son environnement concurrentiel, l'entreprise doit recourir aux outils scientifiques afin d'organiser au mieux sa production dont l'optimisation joue un rôle primordial.

Les méthodes d'optimisation foisonnent dans la littérature. Elles se différencient par la nature du problème en question, la nature des contraintes prises en compte, les objectifs à satisfaire et la nature de l'approche de résolution adoptée.

Aujourd'hui, Danone Djurdjura Algérie dispose de 3 grands ateliers :

- Atelier process : C'est l'atelier de préparation de la mass blanche, là où les ingrédients nécessaires à sa réalisation sont stockés (poudre de lait, sucre,. . .). Elle compte les chambres froides pour la conservation des fermants, une autre pour les jus et les arômes et enfin une chambre chaude pour le conditionnement de la matière grasse ;
- Atelier1 : C'est le magasin tampon de production, il contient sept lignes de production ;

– Atelier2 : C'est le magasin tampon de production, il contient cinq lignes de production.

Actuellement, Danone Djurdjura Algérie compte 13 conditionneuses. Elle produit 36 articles laitiers différents (Activia, yaoumi, crème dessert, Danone brassé, new danino, Dan'up, danao, Lait fraise à boire).

Comme les produits laitiers sont largement consommés, l'entreprise adopte la stratégie de production à la commande. Danone envisage d'augmenter sa production afin de pouvoir faire face à la demande des clients. C'est pourquoi les gestionnaires nous ont suggéré de considérer l'optimisation de leur système de production.

La prise de décisions au sein d'une entreprise doit se faire de manière à satisfaire les différents objectifs, souvent contradictoires qu'elle s'est fixée. Le choix d'une méthode d'optimisation doit lui aussi se plier à cet aspect multicritère.

Le système de production est soumis, d'une part, à des contraintes physiques (capacité de production, rentabilité de production, capacité de stockage et disponibilité des lignes de production) et d'autre part, il doit minimiser les déviations indésirables des niveaux d'aspiration (buts) fixés par l'entreprise. L'approche de résolution qui décrit le plus fidèlement cette situation est la méthode de **programmation de but**.

Position du problème

Notre problème s'inscrit dans le cadre d'une planification de la production. S'agissant d'une entreprise produisant plusieurs biens dans un marché concurrentiel, le problème consiste à déterminer pour chaque bien la quantité optimale à produire.

Ces quantités doivent donc respecter certaines contraintes exigées d'une part, par le système physique : contraintes de capacités de production et contraintes de capacités de stockage du produit fini, contraintes de disponibilité des lignes de production et d'autre part, satisfaire les niveaux d'aspiration fixés par l'entreprise.

C'est dans cette optique que l'entreprise Djurdjura envisage de bien utiliser ses ressources de production afin de pouvoir faire face à la demande des clients, tout en minimisant ses dépenses, afin d'en tirer les plus grands profits de la vente de chaque produit.

C'est pour cela qu'un planning de production prenant en considération ces différents objectifs s'impose.

Formulation mathématique du problème

Nous formulons le modèle de base de production de l'entreprise Danone qui se présente comme un ensemble de programmes de but ayant un objectif de maximisation de profit journalier et 36 buts sur la production des produits pris en compte dans notre étude. Ce modèle est soumis à des contraintes de capacité de production, rentabilité des conditionneuses, disponibilité des machines et contrainte de capacité de stockage. Les buts auront comme niveaux d'aspiration les objectifs de production de chaque produit pour chaque jour pendant le mois de juin. Les priorités des buts sont attribuées en fonction de l'importance relative de chaque but.

Définition des variables de décision

Soient les variables de décision suivantes :

x_i : La quantité à fabriquer du produit i, $i = \overline{1,36}$.

où

$$x_i = \sum_{j=1}^{13} x_i^j, \quad i = \overline{1,36}.$$

x_i^j est la quantité à lancer en production du produit i sur la ligne de production j.

Les variables $(x_i)_{1 \leq i \leq 36}$ sont définies dans le tableau suivant :

Variable	Désignation (en pots produits par jour)
x_5	Quantité à produire en Fruit fraise biscuit 90g
x_6	Quantité à produire en Fruit fruits des bois 90g
x_7	Quantité à produire en New danino abricot 45g
x_8	Quantité à produire en New danino fraise 45g
x_9	Quantité à produire en Danette caramel 90g
x_{10}	Quantité à produire en Danette chocolat 90g
x_{17}	Quantité à produire en New danino nature sucré 45g
x_{18j}	Quantité à produire en Mini prix ferme abricot 75g
x_{19}	Quantité à produire en Mini prix ferme fraise 75g
x_{20}	Quantité à produire en Mini danette 75g
x_2	Quantité à produire en Lait fraise à boire 90g
x_{22}	Quantité à produire en Activea ferme nectarine 100g
x_{23}	Quantité à produire en Activea ferme nature 100g
x_{24}	Quantité à produire en Activea ferme abricot 100g
x_{25}	Quantité à produire en Activea ferme miel 100g
x_{26}	Quantité à produire en Activea ferme fraise 100g
x_{27}	Quantité à produire en Activea ferme vanille 100g
x_{28}	Quantité à produire en Danone brassé nature sucre 90g
x_{29}	Quantité à produire en Danone brassé fraise 90g
x_{30}	Quantité à produire en Danone brassé fruit des bois 90g
x_{31}	Quantité à produire en Danone brassé abricot 90g
x_{32}	Quantité à produire en Yaoumi fraise 100g
x_{33}	Quantité à produire en Yaoumi pêche/abricot 100g
x_{34}	Quantité à produire en Yaoumi banane 100g
x_{35}	Quantité à produire en Yaoumi FDB/cerise 100g

Variable	Désignation (en bouteilles produites par jour)
x_1	Quantité à produire en Dan'up fraise biscuit 100g
x_2	Quantité à produire en Dan'up fraise 100g
x_3	Quantité à produire en Dan'up tropico 100g
x_4	Quantité à produire en Dan'up abricot100g
x_{11}	Quantité à produire en Danao 1l orange/ananas
x_{12}	Quantité à produire en Danao 1l pêche/abricot
x_{13}	Quantité à produire en Danao 1l fruits exotiques
x_{14}	Quantité à produire en Danao 0.25l orange/ananas
x_{15}	Quantité à produire en danao 0.25l pêche/abricot
x_{16}	Quantité à produire en Danao 0.25l fruits exotiques
x_{36}	Quantité à produire en Activea drink caramel 100g

Fonction objectif

L'objectif principal de ce modèle est de maximiser le profit global de l'entreprise Danone engendré par tous les produits. La fonction objectif s'écrit sous la forme suivante :

$$Max \sum_{i=1}^{36} c_i x_i \tag{1.1}$$

où :
c_i est le prix unitaire de vente du produit i i= $\overline{1-36}$.
x_i est la quantité à produire pour chaque bien i= $\overline{1-36}$.

Déduction des contraintes

Contraintes sur les capacités de production de chaque conditionneuse

L'entreprise dispose de 13 conditionneuses, donc chaque conditionneuse a une certaine capacité de production qu'il ne faut pas dépasser. Donc, la somme des quantités produites par chaque ligne de production doit être inférieure ou égale à sa capacité maximale de production.

Ainsi que, la capacité maximale de chaque ligne de production est calculée de la manière suivante :
Capacité maximale $= \frac{1}{1000000}$cadence $*$ poids du produit $*$ 24. (la cadence de chaque ligne de production et le poids de chaque produit sont donnés dans l'annexe). Ce type de contraintes (contraintes de capacité production) prend la forme suivante :

$$\sum_{i=1}^{m} c_i x_i \leq k_j \;\; j = \overline{1,13}$$

Où :

- m est l'ensemble des produits fabriqués par la ligne j.
- k_j est la capacité maximale de la ligne j
- c_i est le poids du produit i.

Contraintes de rentabilité de chaque conditionneuse

Pour qu'une ligne de production soit rentable, l'entreprise fixe des seuils de rentabilités, donc chaque conditionneuse doit dépasser une certaine quantité pour rentabiliser les dépenses.

Ce type de contraintes (contraintes de rentabilité de chaque ligne de production) prend la forme suivante :

$$\sum_{i=1}^{m} c_i x_i \geq R_j \quad j = \overline{1,13}$$

Où :

- m est l'ensemble des produits fabriqués par la ligne j.

– R_j est le seuil minimal pour que la ligne j soit rentable.

– c_i est le poids du produit i .

Contraintes de capacité de stockage

L'entreprise Danone dispose de 4 Dépôts (clients directs) auxquels elle livre ses produits finis, chacun des dépôts a une capacité limitée donnée dans le tableau suivant :

Dépôt	Capacité (tonnes)
Oran	200
Ain Benian	250
Annaba	160
Akbou	350
Total	960

Donc, la somme des quantités produites doit être inférieure ou égale à la somme des capacités des quatres dépôts .

$$\sum_{i=1}^{36} p_i x_i \leq 960 \tag{1.2}$$

Tel que p_i : est le poids du produit i.

Contraintes de disponibilité de chaque machine

Chaque ligne de production est disponible pendant 24H, où on soustrait le temps d'arrêt de la ligne de production (lavage, panne,. . .). La contrainte à exprimer est de type inférieure ou égale, car on ne peut pas utiliser une ligne que durant son temps de disponibilité, par conséquent ce temps est une borne supérieure.

Ce type de contraintes (contraintes de disponibilité de chaque ligne de production) prend la forme suivante :

$$\sum_{i=1}^{m} b_i^j x_i \leq T_j \quad j = \overline{1,13}$$

Où :

– m est l'ensemble des produits fabriqués par la ligne j.

– T_j est le temps de disponibilité de la ligne j.

– b_i^j est le débit horaire de fabrication du produit i par la j^{eme} ligne.

Contraintes de la demande

Le décideur souhaite que la demande de chaque produit pour chacune des périodes de planification soit satisfaite, ce qui peut se formuler comme suit :

$$x_i \geq D_i \qquad i = \overline{1,36} \tag{1.3}$$

où D_i est la demande journalière du produit i.

Contrainte de non négativité

Les variables de décision étant des quantités à produire, il est évident d'avoir toute les variables non-négatives.

$$x_i \geq 0 \quad i = \overline{1,36} \tag{1.4}$$

Ainsi, le modèle de production se présente sous la forme suivante :

$$\begin{cases} Max \sum\limits_{i=1}^{36} c_i x_i = Z, \\ Demande : x_i \geq D_i \quad i = \overline{1,40}, \\ Sous \;\; contrainte :, & ; \\ Capacit\acute{e} \;\; de \;\; production : \sum\limits_{i=1}^{m} c_i x_i \leq k_j \;\; j = \overline{1,13}, \\ Rentabilit\acute{e} \;\; de \;\; production : \sum\limits_{i=1}^{m} c_i x_i \geq R_j \;\; j = \overline{1,13}, \\ Capacit\acute{e} \;\; de \;\; stockage : \sum\limits_{i=1}^{36} p_i x_i \leq 960, \\ Disponibilit\acute{e} \;\; des \;\; lignes \;\; de \;\; production : \sum\limits_{i=1}^{m} b_i^j x_i \leq T_j \;\; j = \overline{1,13}, \\ x_i \geq 0 \quad i = \overline{1,36}, & . \end{cases}$$

Le problème ainsi établi, il s'agit bien d'un problème d'optimisation multi-objectif. Il existe dans la littérature une grande variété de méthodes de résolution d'un problème mult-objectif, mais avant de se lancer dans la résolution, il faut se poser la question sur le type de méthode à utiliser. Notre choix s'est porté sur la méthode de programmation de but.

Justification du choix de la programmation de but

On donnera ici les principales raisons justifiant le choix :

- Au début la programmation de but est un sous domaine d'optimisation multicritère ;
- C'est un prolongement logique de la programmation linéaire ;

- On peut classer les contraintes du problème comme contraintes régides (non flexibles), et non régides. Un tel classement n'est pas possible dans la programmation linéaire. Ainsi, on peut diminuer la possibilité de rencontrer les solutions irréalisables. En effet, la PB peut être une évaluation pour les contraintes, quand les niveaux sont précisés pour les contraintes possédant une incertitude ;
- Il est moins difficile de déterminer les niveaux d'aspiration pour des objectifs que de déterminer les fonctions d'utilité et les taux de substitution par les objectifs ;
- Il est difficile de déterminer les poids à attribuer aux fonctions objectifs pour définir la fonction d'utilité et il y aura le problème d'unité de mesure associée à chaque fonction objectif. Dans la PB (lexicographique), ce problème ne se présente pas, ou bien il se présente avec moins de difficultés.
- Il n'y aura pas de problème du choix parmi les solutions efficaces comme dans l'optimisation du vecteur.

Programmation de but

Conçue et développée par Abraham Charnes et William Cooper, la PB a été initialement nommée "régression par contraintes". Elle était une méthode non paramétrique très puissante pour le développement de fonctions de régression sujettes à des contraintes. Ils l'ont initialement appliqué à l'analyse de la compensation exécutive de "General Electric", puis ils ont nommé plus tard la programmation de but(PB).

La programmation de but (PB) repose sur l'hypothèse que le décideur est une personne intelligente, logique et il connaît intuitivement qu'il n'est pas possible d'optimiser en même temps plusieurs objectifs conflictuels. Il connaît sans doute la direction d'optimisation soit "maximiser ou minimiser", et peut préciser des niveaux souhaitables quantitativement, ceux-ci n'étant pas nécessairement les niveaux optimaux.

Le décideur sait cependant que la solution obtenue, par la PB peut être sous optimale, mais en changeant les niveaux d'aspiration pas par pas, Il peut améliorer progressivement les niveaux réalisables et ceci est aussi une façon d'améliorer évolutivement dans le temps, et interactivement avec les solutions obtenues dans le passé. C'est une approche plus modeste que l'optimisation mais encore plus réaliste dans le monde réel.

La programmation de but (PB) est un prolongement logique de la programmation linéaire, Ignizio a établi le prolongement aux cas non linéaires et en nombre entiers et il l'appliqua par la suite à un nombre important de problème linéaire et montra ainsi son efficacité. Par la suite, plusieurs chercheurs ont essayé de développer cette méthode. Parmi eux Ijiri, Jacklainen, Huss, Ignizio, Gass, Romeo, Caballero, Tamiz et Jones, et leurs travaux étaient essentiellement basés sur l'amélioration de la fonction d'achèvement qui est une fonction des déviations des buts en la modélisant en fonction des préférences du preneur de décision. Le mot clé de la programmation de but est la fonction d'achèvement. En effet, tout développement de la PB est relative au développement de cette fonction.

L'idée principale de la programmation de but est de spécifier des niveaux d'aspiration pour l'achèvement de chaque critère.

Un programme de but est un modèle mathématique, comportant des fonctions linéaires ou non linéaires et des variables continues ou discrètes dans lequel tous les objectifs sont transformés en buts en y spécifiant des niveaux d'aspiration [1].

Terminologie et concepts [2]

1. Un objectif est une fonction avec laquelle on cherche à optimiser un critère via des changements dans les variables du problème. Les plus communes formes des objectifs sont celles dans lesquelles on cherche à minimiser ou maximiser une fonction. Min(max) Z = f(x), où f(x) est une fonction des variables de décision.
2. Un but est un objectif dont on définie une valeur d'aspiration (de satisfaction) .
3. Un niveau d'aspiration est une valeur spécifique d'un objectif ou bien d'un niveau acceptable d'achèvement d'un objectif. Donc, c'est une mesure quantitative d'achèvement d'un objectif. Elle sert à traduire un objectif en une réalité.
4. La fonction d'achèvement est la fonction qui mesure le degré d'accomplissement des buts du problème. Cette fonction mesure le degré de minimisation des variables de déviation indésirables considérées dans le modèle de la PB.

Variables de déviation

Dans un but, on distingue les niveaux d'aspiration t_i du preneur de décision et la réussite actuelle $f_i(x)$ du but. Trois cas sont alors envisageables :

1. $f_i(x) \leq t_i$, i.e. on doit achever la valeur de $f_i(x)$ qui est inférieure ou égale à t_i.
2. $f_i(x) \geq t_i$, i.e. on doit achever la valeur de $f_i(x)$ qui est supérieure ou égale à t_i.
3. $f_i(x) = t_i$,i.e. on doit achever la valeur de $f_i(x)$ qui est égale à t_i.

Donc, on va introduire la notion de la variable de décision. Si par exemple on considère le troisième cas cité ci-dessus, à savoir on veut que la valeur de $f_i(x)$ soit égale à t_i. La variable de déviation sera alors définie comme suit :

$$d = t_i - f_i(x)$$

La variable de déviation d pourra alors être positive, négative ou nulle. En effet, une variable de déviation représente la distance entre le niveau d'aspiration et l'achèvement actuel de but. On peut donc avoir un achèvement qui soit supérieur, inférieur, ou égale au niveau d'aspiration.

Notons que dans les contraintes de but ci-dessus, les points suivants sont toujours vérifiés :

- Si $f_i(x) \geq t_i$ alors $d_i^+ > 0$, $d_i^- = 0$
- Si $f_i(x) \leq t_i$ alors $d_i^+ = 0$, $d_i^- > 0$
- Si $f_i(x) = t_i$ alors $d_i^+ = d_i^- = 0$

Formulation d'un programme de but linéaire

Soit $Z_j = f_j(x)$ une fonction linéaire reliée à l'objectif j, où $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un vecteur des variables de décisions. Un programme de but linéaire peut se formuler comme suit :

$$\begin{cases} GOAL(c^1x = z_1)(z_1 \geq t_1), \\ GOAL(c^2x = z_2)(z_2 \leq t_2), \\ GOAL(c^3x = z_3)(z_3 = t_3), \\ GOAL(c^4x = z_4)(z_4 \in [t_4^1; t_4^2]), \\ Satisfaisant :, \\ x \in S, \end{cases}$$

où :

t_i : niveau d'aspiration des buts ; $i = \overline{1,4}$

c^i : vecteur ligne à n composantes

$x \in R^n$

On a donc la formulation des buts et leurs contraintes dans le tableau suivant :

Type de but	Forme de la contrainte de but	Var d'écart à minimiser
$z_1 \geq t_1$	$z_1 + d_1^- \geq t_1$	d_1^+
$z_2 \leq t_2$	$z_2 - d_2^+ \leq t_2$	d_2^-
$z_3 = t_3$	$z_3 + d_3^- - d_3^+ = t_3$	$d_3^- + d_3^+$
$z_4 \in [t_4^1; t_4^2]$	$z_4 + d_4^- \geq t_4^1, z_4 - d_4^+ \geq t_4^2$	d_4^-, d_4^+

Les fonctions définissant ces z_i seront les fonctions de buts relatives aux contraintes du problème. Cependant, les fonctions définissant les contraintes du problème pourraient être classées en deux catégories : celle gouvernant les contraintes rigides (reflétant les conditions physiques, techniques et technologiques dont les niveaux sont bien connus et inchangeables). celle gouvernant les contraintes non rigides dont les niveaux d'aspiration sont connus imprécisément ou changés avec un léger changement de la politique.

Supposons qu'une contrainte $z_1 \leq t_1$ reflète la disponibilité actuelle de nombres de machines d'une entreprise. Donc la valeur à gauche ne pourra jamais dépasser la valeur à droite, mais supposons que z_1 est le nombre d'heures dans une journée de travail, comme $x_1 + x_2 \leq 8$ heures par exemple. Alors on peut employer les heures supplémentaires pour pouvoir dépasser huit heures, c'est à dire que la limite à droite peut être physiquement dépassée en changeant la politique, par conséquent une contrainte flexible non rigide.

Donc, dans la programmation de but, on supposera que quelques contraintes du problème sont rigides, et d'autres non, et ceci donne une flexibilité en pratique qui n'existera pas dans le modèle de programmation linéaire, c'est à dire, toute contrainte non rigide peut être traitée comme un but ou s'il s'agit de minimiser la déviation indésirable.

Une fois qu'un PL est transformé en un PB, la fonction objectif sera définie par la fonction d'achèvement, cette dernière se determine par différentes approches.

Approche archimédienne

Dans cette approche, on minimise la somme pondérée des écarts indésirables mesurés des valeurs précisées du but. Pour illustrer cette approche, on supposera le problème de but suivant :

$$\begin{cases} GOAL(c^1x = z_1)(z_1 \geq t_1), \\ GOAL(c^2x = z_2)(z_2 \leq t_2), \\ GOAL(c^3x = z_3)(z_3 = t_3), \\ GOAL(c^4x = z_4)(z_4 \in [t_4^1; t_4^2]), \\ Satisfaisant :, \\ x \in S, \end{cases}$$

S étant l'ensemble formé par les contraintes rigides du problème. Dans cette approche, ce problème se ramène à la résolution du programme suivant :

$$\begin{cases} Fonction \;\; d'ach\grave{e}vement, \\ Min \;\; a = \{w_1^- d_1^- + w_2^+ d_2^+ + w_3^- d_3^- + w_3^+ d_3^+ + w_4^- d_4^- + w_4^+ d_4^+\}, \\ Satisfaisant, \\ c^1x + d_1^- + \qquad\qquad\qquad\qquad \geq t_1, \\ c^2x + \quad -d_2^- + \qquad\qquad\qquad \leq t_2, \\ c^3x + \qquad\quad +d_3^- - d_3^+ + \qquad = t_3, \\ c^4x + \qquad\qquad\qquad +d_4^- \quad \geq t_4^1, \\ c^4x + \qquad\qquad\qquad -d_4^+ \quad \geq t_4^2, \\ x \in S, \\ d_i^+ \geq 0, d_i^+ \geq 0, i = \overline{1,4}, x \geq 0, \end{cases}$$

où :

w_i : sont des poids de pénalité positifs.

d_i^+, d_i^+ : sont les variables de déviation.

Cette formulation implique la minimisation d'une fonction d'utilité additive. Ainsi, le PB est formulé comme étant un programme linéaire (PL). L'inconvénient de cette méthode est le choix des w_i, dans la pratique les unités de mesure des buts sont différentes et sont toutes à des niveaux d'aspiration relatifs. Dans tels cas, les w_i doivent refléter non seulement l'importance relative des buts mais aussi leurs niveaux d'aspiration. Malgré l'inconvénient déjà cité, l'approche archimédienne a été employée très souvent en pratique, Cette approche repose le plus dans le choix des contraintes, comme les contraintes rigides et non rigides, le choix des buts et leur pondération en fonction de leur importance. La résolution de ce programme linéaire se fait avec l'algorithme du simplexe.

On vient de décrire l'approche archimédienne pour la résolution d'un PB. Cette approche explicite les contraintes rigides et les autres contraintes non rigides afin d'augmenter le profit.

En d'autre terme, elle nous a permis de définir quelles sont les contraintes qu'il faut relâcher et celles qu'il faut retenir pour obtenir des solutions réalisables et optimales. Ainsi, grâce à la PB on peut donc avoir une solution satisfaisante pour n'importe quel problème pratique dont on ne trouve pas de solutions avec la méthode conventionnelle.

Approche lexicographique

Dans cette approche, on attribue à chaque but une priorité de résolution. Les buts à plus haut niveau de priorité sont considérés infiniment plus importants que ceux de niveaux de priorité secondaires et ainsi de suite.

Pour expliquer le principe de cet approche, reprenons le problème de but et associons une priorité p_i,i= $\overline{1,4}$ à chacun des 4 buts.

En utilisant le facteur de priorité, on aura le problème lexicographique suivant :

$$\begin{cases} Fonction\ \ d'ach\text{è}vement, \\ Min\ \ a = \{p_1 d_1^- + p_2 d_2^+ + p_3(d_3^- + d_3^+) + p_4(d_4^- + d_4^+)\}, \\ Satisfaisant, \\ c^1x + d_1^- + \qquad\qquad\qquad\qquad \geq t_1, \\ c^2x + \quad -d_2^- + \qquad\qquad\qquad \leq t_2, \\ c^3x + \qquad\quad +d_3^- - d_3^+ + \qquad = t_3, \\ c^4x + \qquad\qquad\qquad\quad +d_4^- \quad \geq t_4^1, \\ c^4x + \qquad\qquad\qquad\quad -d_4^+ \quad \geq t_4^2, \\ x \in S, \\ d_i^+ \geq 0, d_i^+ \geq 0, i = \overline{1,4}, x \geq 0, \end{cases}$$

La fonction objectif (d'achèvement) peut s'écrire aussi sous la forme suivante :

$$Lexmin\ \ a = \{d_1^-, d_2^+, (d_3^- + d_3^+), (d_4^- + d_4^+)\}$$

Dans cette variante, les objectifs sont classés par ordre de priorité, selon l'importance relative que leur accorde le décideur.

Dans ce modèle, les différents objectifs sont divisés en plusieurs niveaux de priorités. C'est une façon d'introduire les préférences du décideur dans la modélisation.

Les objectifs de priorités supérieures sont résolus en premier et c'est après cela que les priorités inférieures sont prises en considération. Le résultat du premier niveau devient une contrainte dans l'étape suivante et ainsi de suite.

Pour résoudre ce type de problème, on utilise soit l'algorithme P.B.L.S (Programme de But Linéaire Séquentiel) ou bien l'algorithme multiphase.

Étant donné un modèle d'achèvement et les buts associés avec une priorité de niveau 1. Le résultat dans l'établissement du modèle de P.L a une seule fonction objective donnée par :

$$\begin{cases} Minimiser \quad a_1 = p_1(d^-, d^+), \\ Satisfaisant, \\ \sum_{j=1}^{n} c_{i,j}x_j + d_i^- - d_i^+ = t_i \quad pour \;\; i \in p_1, \\ x, d^-, d^+ \geq 0 \end{cases}$$

Où d^- et d^+ sont les vecteurs de d_i^- d_i^+ respectivement et p_1 est une fonction linéaire.

On minimise le premier terme dans la fonction d'achèvement seulement des buts dont la priorité possède le niveau 1 (c'est à dire i$\in p_1$), une fois ceci fait, on a une meilleure solution pour a, désignée par a_1^* , s'il existe des optimaux alternatifs on va à la priorité 2, sinon on s'arrête.

On passe maintenant au prochain niveau de priorité. Ici, on sera obligé de minimiser le second terme dans la fonction d'achèvement a_2^*, cependant on le fera sous conditions que :

- Tous les buts appartenant à la priorité 1 ne seraient pas détériorés. Celle-ci donnant une contrainte rigide de but qui assure que n'importe quelle solution de la priorité 2 ne peut dégrader le niveau d'achèvement obtenu en priorité 1, et c'est :

$$a_1 = p_1(d^-, d^+) = a_1^*$$

On continuera la procédure jusqu'à ce que toutes les priorités seront considérées, ou bien il n'existe pas de solution optimale à n'importe quelle phase. La solution finale, ainsi obtenue, est aussi la solution optimale du programme linéaire de but. L'algorithme qui implémente cette procédure sera donnée ci -dessous [1] :

- **Étape 1** : Soit k une variable qui représente le niveau de priorité et K le nombre total de priorités, mettre k=1.
- **Étape 2** : Établir la formulation mathématique pour le niveau de priorité 1 seulement

$$\begin{cases} Minimiser \quad a_1 = p_1(d^-, d^+), \\ Satisfaisant, \\ \sum_{j=1}^{n} c_{i,j}x_j + d_i^- - d_i^+ = t_i \quad pour \;\; i \in p_1^*, \\ x, d^-, d^+ \geq 0 \end{cases}$$

  p_1^* : est l'ensemble d'indices des variables de déviation appartenant à la priorité 1.

  Le problème ainsi formulé est simplifié et donné comme étant un PL à objectif unique qu'on peut résoudre par la simplexe.
- **Étape 3** : Résoudre le problème à objectif unique associé au niveau de priorité k, via tout algorithme approprié. La solution optimale de ce problème est donnée par a_k^*, elle est associée au vecteur optimal (x_k^*,d_k^*). Aller à l'étape 8.
- **Étape 4** : La solution correspondante (x_k^*,d_k^*) est-elle unique ?

  Si oui, on peut s'arrêter et c'est la solution optimale.

  Sinon aller à l'étape 5.

- **Étape 5** : Mettre k :=k+1
  Si k > K aller à l'étape 8. **Sinon** aller à l'étape 6.
- **Étape 6** : Établir le modèle à objectif unique équivalent pour le prochain niveau de priorité k en remplaçant les valeurs optimales des déviations déjà calculées. Ce modèle est donné par :

$$\begin{cases} Minimiser \quad a_k = p_k(d^-, d^+), \\ Satisfaisant, \\ \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} x_j + d_i^- - d_i^+ = t_i \quad i \ indice \ des \ buts \ de \ priorité \ 1, 2, \ldots, k. \\ a_s(d^-, d^+) \leq a_s^* \quad s = 1, \ldots, k-1. \\ x, d^-, d^+ \geq 0 \end{cases}$$

- **Étape 7** : Résoudre le problème de l'étape 6 et aller à l'étape 4 .
- **Étape 8** : Le vecteur solution x* associé au dernier modèle à objectif unique résolu est le vecteur optimal du modèle de la PB.

Application et interprétation des résultats

Nous avons implémenté les deux approches de programmation de but (archimédienne et lexicographique) présentées précédemment sous l'environnement MATLAB et nous avons obtenu les quantités optimales journalières à produire pour chaque produit. Pour ce faire, nous avons choisi le 10 juin 2012, dont les données (demande, disponibilité des lignes de production,...) sont significatives.

Les produits demandés, les quantités optimales fournies par les deux approches ainsi que les quantités demandées sont donnés dans le tableau suivant :

Variables	Produits	Qtités opt (arch)	Qtités opt (lexic)	Qtités réelles	Demande
x_2	Dan'up fraise 100g	200 110	200 200	105 000	200 000
x_6	fruix fruits des bois 90g	222 220	222 300	200 000	222 220
x_8	New danino fraise 45g	400 100	400 000	181 333	400 000
x_{10}	Danette chocolat 90g	244 450	244 480	110 000	244 440
x_{12}	Danao 1l pêche/abricot	60 000	61 000	47 250	56 810
x_{15}	Danao 0.25l pêche/abricot	80 000	80 100	46 000	80 000
x_{18}	Mini prix ferme abricot 75g	333 400	333 380	192 000	333 330
x_{19}	Mini prix ferme fraise 75g	666 700	666 720	516 000	666 660
x_{21}	Lait fraise à boire 90g	180 000	180 500	185 555	166 660
x_{24}	Activia ferme abricot 100g	400 000	400 000	400 500	400 000
x_{25}	Activia ferme miel 100g	400 000	400 000	400 500	400 000
x_{26}	Activia ferme fraise 100g	200 000	200 000	556 000	200 000
x_{29}	Danone brassé fraise 90g	111 150	111 130	105 555	111 110
x_{30}	Danone brassé fruit des bois 90g	222 250	222 230	200 333	222 220
x_{32}	Yaoumi fraise 100g	100 000	100 000	0	400 000
x_{33}	Yaoumi pêche/abricot 100g	90 000	115 000	88 000	400 000
x_{36}	Activia drink caramel 100g	80 000	80 200	31 000	70 000

Les profits engendrés par l'exploitation du plan optimal fourni par l'approche archimédienne, lexicographique ainsi que le profit effectif de l'entreprise sont illustrés dans la figure suivante :

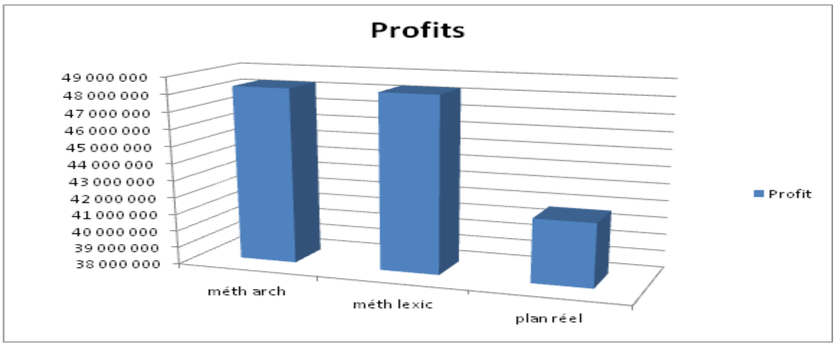

FIGURE 1.1: Comparaison des profits engendrés

Soit une augmentation du chiffre d'affaire de :

– 6572949 DA (15.75%) à l'aide de la méthode archimédienne.
– 6907069 DA (16.55%) en exploitant la méthode lexicographique.

Taux d'utilisation des conditionneuses

La non satisfaction des produits Yaoumi, est peut être dû à la contrainte de capacité de production ou à la contrainte de disponibilité des lignes de production, c'est pourquoi le calcul du taux d'utilisation des conditionneuses est nécessaire.

Chaîne	Taux d'utilisation (%)
Ligne 1	93.75
Ligne 2	38.36
Ligne 3	62.5
Ligne 4	57.87
Dessert 1	53.82
Titra 1	55.55
Titra 2	74.07
Sidel	98.09
Ermi	55.56
Brassé 4	59.67
Fromage 3	80.13
Fromage 2	78.11
Optima	64.16

Chaîne	Taux d'utilisation (%)
Ligne 1	93.75
Ligne 2	38.36
Ligne 3	62.5
Ligne 4	60.28
Dessert 1	53.83
Titra 1	56.48
Titra 2	75
Sidel	98.09
Ermi	55.56
Brassé 4	59.67
Fromage 3	80.13
Fromage 2	78.11
Optima	64.16

FIGURE 1.2: Taux d'utilisation des lignes de production

Interprétation des résultats

Pratiquement les deux approches (archimédienne et lexicographique) donnent des solutions proches, en effet :

- L'analyse des tableaux du taux d'utilisation des conditionneuses montre que les capacités de production de l'entreprise sont suffisantes pour satisfaire la demande de ses clients. Cependant, elles ne fonctionnent pas avec leur capacité maximale, cela est dû au temps de disponibilité des conditionneuses qui est très réduit.
- Une augmentation des quantités à produire, dans les solutions optimales, pour les produits Danao et Activea drink (produits de luxe), et cela est dû aux coefficients élevés des fonctions objectifs correspondantes. Tandis que les quantités des autres produits sont proches de la demande. Ce qui justifie cette augmentation du bénéfice.
- Dans la situation présente, un critère peut être plus important qu'un autre, c'est une réalité dont il faut tenir compte dans le processus d'aide à la décision.
- Les quantités produites (à l'exception de Yaoumi fraise et Yaoumi abricot) sont toutes comprises entre les quantités demandées et le seuil de production maximal. De ce fait, les demandes des clients (à l'exception de la demande des produits Yaoumi) sont totalement satisfaites.
- Il savère qu'avoir un chiffre d'affaire maximal et une faible utilisation des capacités des lignes de production sont deux objectifs contradictoires.
- La demande des produits Yaoumi n'est pas satisfaite malgré que la conditionneuse (ligne 2) qui peut produire Yaoumi n'a pas encore atteint le seuil maximal (taux d'utilisation est de 38.36%). Cela est dû aux temps de disponibilité de cette chaîne qui est très réduit (8h). Donc, il faut prêter une attention particulière aux lignes de production pour minimiser le temps d'arrêt.
- La gamme Activea (produits de luxe) et la gamme Yaoumi sont produites à l'aide des mêmes conditionneuses, mais on remarque une satisfaction totale de la gamme a Activea et une

rupture pour la gamme Yaoumi. Cela est dû aux poids élevés associés aux produits de la gamme Activea.

– Grâce à la programmation de but, nous avons pu évaluer les écarts entre le plan optimal établi et les buts fixés par l'entreprise.
– Les résultats nous indiquent que certains produits (Dan'up, Lait fraise à boire,...) sont atteints avec dépassement (sur-achèvement) ce qui veut dire que pour atteindre ces objectifs (satisfaction de la demande des produit qui sont sur-achevés), l'entreprise doit fonctionner avec sa capacité maximale ;
– Les résultats nous indiquent aussi, que certains produits (Yaoumi) sont sous-achevés, ce qui veut dire que pour atteindre ces objectifs, l'entreprise doit minimiser le temps d'arrêt des lignes de production servant à produire ces produits.
– Le plan de production proposé sera profitable à l'entreprise surtout à long terme. Cela est dû au fait que cette solution est plus proche de la réalité de l'entreprise.
– Signalons aussi qu'on peut changer à tout moment de niveau d'aspiration ou de relaxer avec un certain pourcentage les buts non achevés (résolution interactive avec le décideur).
– Comme l'achèvement de tels multiples objectifs (chiffre d'affaire, demande de chaque produit) est souvent impossible, la programmation de but crée l'espace de solutions satisfaisantes en spécifiant des niveaux d'aspiration.
– Par conséquent, la solution trouvée permet donc une meilleure organisation des lignes de production, puisqu'elle permet d'améliorer le chiffre d'affaire de l'entreprise.

Conclusion

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à l'étude d'une problématique industrielle qui s'est portée sur la planification de la production de la SARL Danone Djurdjura Algérie. L'un des moyens d'atteindre l'objectif fixé quand le prix de vente du produit est imposé par le marché est de réduire les coûts en accordant un intérêt particulier à la planification de la production. En effet, c'est en réalisant ces objectifs que la production va contribuer au succès de la stratégie globale de l'entreprise.

Ce travail présente une méthodologie de modélisation en vue de déterminer les combinaisons de production en produits laitiers, afin de maximiser le profit engendré.

A l'issue de l'analyse et de l'étude des données recueillies au sein de l'entreprise, un modèle sous forme de programme linéaire multi-objectif avec quarante et un objectifs à atteindre (un but du chiffre d'affaire et quarante buts traduisant la demande de chaque produit).

Le modèle ainsi obtenu étant un problème multicritère, nous avons proposé deux approches de programmation de but, à savoir l'approche archimédienne et l'approche lexicographique.

Ces approches ont été implémentées sous Matlab.

L'étude comparative effectuée sur les données de la production a montré que nos résultats offrent, pour le cas d'exemple cité, une augmentation du profit de l'entreprise d'environ 16%.

La solution obtenue permet une meilleure organisation des lignes de production, puisqu'elle permet d'améliorer le chiffre d'affaire de l'entreprise et de satisfaire la demande des clients.

Ce travail peut être complété par une étude de gestion des stocks de l'entreprise et une étude statistique afin d'anticiper les demandes et de prévoir les approvisionnement. Comme il sera intéressant d'effectuer une étude de maintenance pour minimiser le temps d'arrêt des chaînes de production.

Références

1. Y. Coleete, P. Siarry. *Optimisation multi-objectif*, France 2002.
2. Z. Laouabdia. *Quelques aspects de la programmation de but linaire et ses applications*. Thèse de magistère en recherche opérationnelle, Université de Annaba, 1991.
3. D. Aïssani, *Cours de Modèlisation : études de cas*, Département de Recherche Opérationnelle, Université de Béjaïa, 2010.