Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 2, 2004, pp. 63 - 67

11

Inégalités de stabilité forte dans un système de file d'attente $G/M/\infty$

K. MECHERI[1]

U.S.T.H.B, Algerie.
k_macheriyahoo.fr

Résumé Le but de cet artricle est d'obtenir les inégalités de stabilité dans le système de files d'attente $G/M/\infty$ par rapport à la norme $\|.\|_v$.
Contrairement à ce qui a été réalisé dans [2], [3], nous appliquons ici le critère de stabilité forte. Ainsi, nous déterminons les conditions pour lesquelles, il sera possible d'approximer les caractéristiques du système perturbé $G/M/m$ par celles qui correspondent au système $G/M/\infty$. Enfin, nous donnons les estimations des écarts entre les opérateurs de transition P_m et P_∞, puis les estimations de l'écart entre les distributions stationnaires π_m et π_∞ des deux chaînes de Markov induites $\overline{X}_n$ et X_n.

Mots clés : Systèmes de files d'attente, $G/M/\infty$, méthode de stabilité forte, inégalités de stabilité.

11.1 Introduction

Les phénomènes d'attente ont fait l'objet de nombreux travaux dès l'apparition des premiers systèmes téléphoniques. Après la deuxième guerre mondiale, l'étude des problèmes de gestion de stocks et de production ont donné un nouvel élan à la recherche opérationnelle. De plus, la modélisation de la fiabilité des systèmes complexes s'exprime bien en terme de files d'attente [12]. Le but de cet artricle est d'obtenir les inégalités de stabilité dans le système de files d'attente $G/M/\infty$ par rapport à la norme $\|.\|_v$.
Contrairement à ce qui a été réalisé dans [2], [3], nous appliquons ici le critère de stabilité forte. Ainsi, nous déterminons les conditions pour lesquelles, il sera possible d'approximer les caractéristiques du système perturbé $G/M/m$ par celles qui correspondent au système $G/M/\infty$. Enfin, nous donnons les estimations des écarts entre les opérateurs de transition P_m et P_∞, puis les estimations de l'écart entre les distributions stationnaires π_m et π_∞ des deux chaînes de Markov induites $\overline{X}_n$ et X_n.

11.2 Notations et préliminaires

Considérons un système de files d'attente $G/M/m$ $(FIFO, \infty)$, où la distribution de la durée entre deux arrivées consécutives est quelconque H de paramètre λ et la distribution

de la durée de service est exponentielle de paramètre μ.
Soit $\overline{X}_n$: le nombre de clients juste avant la $n^{\text{ième}}$ arrivée dans le système.
Nous avons montré que cette chaîne est de Markov d'opérateur de transition $P_m = [P_{ij}(m)]_{i,j\geq 0}$.
Considérons, en même temps un système de files d'attente $G/M/\infty$ ayant les mêmes distributions que le système précédent, et d'une infinité de serveurs.
Soit X_n : le nombre de clients juste avant la $n^{\text{ième}}$ arrivée dans le système. Ce processus forme aussi une chaîne de Markov d'opérateur de transition $P_\infty = [P_{ij}(\infty)]_{i,j\geq 0}$

11.2.1 L'opérateur de transition

L'opérateur de transition de la chaîne de Markov induite X_n de la file d'attente $G/M/\infty$ est défini par :

$$P_{ij}(\infty) = \begin{cases} 0 & \text{si } j > i+1 \\ \\ \int_0^{+\infty} C_{i+1}^j (1-e^{-\mu t})^{i+1-j} e^{-\mu j t} \, dH(t) & \text{si } j \leq i+1 \end{cases} \tag{11.1}$$

11.3 Stabilité forte

Pour pouvoir démontrer que le système de la chaîne de Markov induite X_n est fortement stable, nous allons appliquer le crotère de Stabilité forte. Pour cela, il est suffisant de trouver une mesure α et une fonction mesurable h sur $\mathbb{N}$, telles que :

1. $\pi_\infty h_i > 0, h_i \circ \alpha_j > 0$ et $\alpha_j \ \mathbb{1} = 1$,
2. L'opérateur $T_{ij} = P_{ij} - h_i \circ \alpha_j$ est non négatif,
3. $\exists \rho < 1$ tel que $Tv(k) \leq \rho v(k)$ pour tout $k \in$ N,
4. $\|P_\infty\|_v < \infty$.

Pour cela, choisissons :
$v(k) = \beta^k$ où $\beta > 1$,

- $h_i = \mathbb{1}_{\{i=0\}}$.
- $\alpha_j = P_{0j}(\infty) = \begin{cases} 0 & \text{si } j > 1, \\ \\ \int_0^{+\infty} (1- \ e^{-\mu t})^{1-j} \ e^{-\mu j t} \ dH(t) & \text{si } j \leq 1. \end{cases}$

Les conditions du critère de stabilité forte étant vérifiées, nous pouvons formuler le résultat suivant.

Théorème 11.1

Supposons que dans un système $G/M/\infty$, la condition d'ergodicité géométrique soit vérifiée. Alors, $\forall\beta$ tel que $1 < \beta < [1-H(\delta)]^{-1}$, la chaîne de Markov X_n est fortement υ-stable pour une fonction $\upsilon(n) = \beta^n$.

Le théorème 14.1, nous permet de conclure qu'il est possible d'approximer les caractéristiques du système $G/M/m$ par celles du système $G/M/\infty$

11.4 Inégalités de stabilité du système $G/M/\infty$

Pour pouvoir estimer numériquement l'écart entre les distributions stationnaires des états des chaînes de Markov X_n et $\overline{X}_n$, estimons au préalable la norme de déviation de l'opérateur de transition P_∞, voir la formule (14.1) (resp. P_m) de la chaîne induite du système $G/M/\infty$ (resp. $G/M/m$).

11.4.1 Estimation quantitative de la norme de déviation de l'opérateur de transition dans le système $G/M/\infty$

11.4.2 L'opérateur de transition dans le système $G/M/m$

$$P_{ij}(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; j > i+1, \\ \int C_{i+1}^{i+1-j}(1-e^{-\mu t})^{i+1-j} e^{-j\mu t} dH(t) & \text{si } j \le i+1 \le m, \\ \int \frac{(m\mu t)^{i+1-j}}{(i+1-j)!} \quad e^{-m\mu t} dH(t) & \text{si } m \le j \le i+1, \\ \int \int\limits_0^t C_m^{m-j}(1-e^{-\mu(t-w)})^{m-j} \; e^{-j\mu(t-w)} \; m\mu \times & \\ \frac{(m\mu \; w)^{i-m}}{(i-m)!} \; e^{-m\mu w} \; dw \; dH(t) & \text{si } j < m \le i+1. \end{cases} \tag{11.2}$$

Lemme 11.1. Soit P_m et P_∞ les noyaux de transition des chaînes de Markov incluses des systèmes $G/M/m$ et $G/M/\infty$ respectivement, pour $\mathcal{W} = \int \frac{1}{t} \; dH(t) \le \infty$ et pour tous β tel que $1 < \beta < [1-H(\delta)]^{-1}$. Alors, l'inégalité suivante est vérifiée,

$$B_1(m) = \sup_{i \ge m-1} \{\beta^{-i} \sum_{j=m}^{i+1} \beta^j |P_{ij}(m) - P_{ij}(\infty)|\} \le \rho + \frac{\beta^2 \mathcal{W}}{(\beta-1)\mu m} \tag{11.3}$$

où $\rho = \beta[1-H(\delta)]$

Lemme 11.2.

Sous les mêmes conditions que le lemme précédent, alors

$$B_2(m) = \sup_{i\geq m-1} \{\beta^{-i} \sum_{j\leq m-1} \beta^j |P_{ij}(m) - P_{ij}(\infty)|\} \leq 2\rho \tag{11.4}$$

Théorème 11.2

Soit P_m et P_∞ les noyaux de transition des chaînes de Markov incluses des système $G/M/m$ et $G/M/\infty$ respectivement. Alors, l'inégalité suivante est vérifiée,

$$\|P_m - P_\infty\|_v \leq 3\rho + \frac{\beta^2 \mathcal{W}}{(\beta-1)\mu m} \tag{11.5}$$

Théorème 11.3 *Soit π_m et π_∞ les distributions stationnaires des chaînes de Markov des systèmes $G/M/m$ et $G/M/\infty$.*
Pour $\mathcal{W} = \int \frac{1}{t}\, dH(t) \leq \infty$ et pour tous β tel que $1 < \beta < [1 - H(\delta)]^{-1}$, nous avons,

$$\|\pi_m - \pi_\infty\|_v \leq (3\rho + \frac{\beta^2 \mathcal{W}}{(\beta-1)\mu m})(1 + \Pi_\infty(\beta))[1 - \rho - (1 + \Pi_\infty(\beta))(3\rho + \frac{\beta^2 \mathcal{W}}{(\beta-1)\mu m})]^{-1} \tag{11.6}$$

Conclusion

La chaîne X_n étant fortement stable, alors les caractéristiques de celle-ci peuvent approcher les caractéristiquesune de toute chaîne de Markov dont le noyau de transition est dans un certain voisinage du noyau de transition P_∞ par rapport à la norme induite précédament. En introduisant une petite perturbation au niveau du nombre de serveurs, nous aurons un système $G/M/m$ dont la chaîne de Markov correspondante est $\bar{X}_n$ de noyau de transition P_m. Les caractéristiques de la chaîne $\bar{X}_n$ peuvent-être approximées par celles de X_n avec une précision qui dépend de la perturbation.

L'utilisation du critère de stabilité forte permet donc d'obtenir les inégalités de stabilité avec un calcul exact des constantes.

Références

1. D. Aïssani. Application of the Operator Methods to Obtain Inequalities of Stability in the $G/M/\infty$ System. *Proceedings of the C.M.M.N.I.2, Rabat*, 2 :106–111, 1989.
2. D. Aïssani. Estimation of the strong stability in an $G/M/\infty$ system. *International Journal " Technologies Avancées"*, 2(2) :29–33, 1992.
3. D. Aïssani. Strong stability of an imbedded markov chain in an $G/M/\infty$ system. *International Journal " Technologies Avancées"*, 2(1) :33–38, 1992.
4. D. Aissani. Strong stability of stochastic models. *Seminar on Stochastics Processes and their applications. F.N.R.S - University of Brussels (Belgium)*, pages x–x, 1993.

5. D. Aïssani and N.V. Katashov. Ergodicity and stability of markov chains with respect to operator topology in the space of transition kernels. *Compte Rendu Academy of Sciences U.S.S.R*, (ser.A,11) :3–5, 1983.
6. M. Benaouicha and D. Aïssani. *Estimate of the Strong Stability in the $G/M/1$ Queueing System.* In the Book "Applied Stochastic Models and Data Analysis", G. Govaert, J. Janssen, and N. Limnios, Editors, Compiègne 2001, Vol. I, pp 172-177.
7. L. Berdjoudj and D. Aïssani. Strong Stability in Retrial Queues, International Journal. *Theory of Probability and Mathematical Statistic*, (68) :11–17, 2003.
8. J. L. Bon. *Fiabilité des systèmes (Méthodes Mathématiques).* Edition Masson, 1995.
9. A.A. Borovkov. *Méthodes asymptotiques en théorie des files d'attente.* Navka, Moscou, 1980.
10. L. Bouallouche and D. Aissani. Performance evaluation of an SW Communication Protocol (Send and Wait). *Proceedings of the MCQT'02 (First Madrid International Conference on Queueing Theory)*, Madrid (Spain), 2002.
11. L. Bouallouche and D. Aissani. Estimate of the strong stability in an M/M/1 queueing systems. *Proceedings of the XX International Seminar on Stability Problems for Stochastics Models, Lublin (Poland)*, page 14 and others, September 1999.
12. E. Gelenbe and G. Pujolle. *Introduction aux réseaux de files d'attente.* Editions Eyrolle, 1985.
13. N.V. Kartashov. Strong stable markov chains. *VSP.Ultrecht.Tbimc Scientific Publishers*, 1996.
14. L. Kleinrock. Queueing systems. *Wiley-Interscience*, 1,2, 1975.
15. S.T. Rachev. The problem of stability in queueing theory. *Queueing Systems*, pages 287–318, 1989.