Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 2, 2004, pp. 59 - 62

10

Sur l'application de la méthode de stabilité forte

L. BOUALLOUCHE[1]

Département d'Informatique / Université de Béjaïa.
louiza_medjkoune@yahoo.fr

Résumé Dans cet exposé, nous présentons un algorithme intuitif d'application des méthodes de stabilité, en particulier de la méthode de stabilité forte (MSF), pour analyser des systèmes réels et déterminer leur degré de stabilité [2]. Nous montrons également comment l'analyse non standard complète la MSF (tout comme les autres méthodes de la théorie des perturbations), lui apporte plus de rigueur et accroît sa puissance. Ainsi, nous déterminons numériquement et avec précision, la déviation maximale du critère de performance du système considéré en fonction de la perturbation imposée. L'algorithme adapté aux résultats théoriques obtenus pour le système M2/G2/1 avec priorité HOL [1] est exécuté sur un modèle numérique. Les résultats obtenus sont confrontés à ceux de la simulation.

Mots clés : Stabilité forte, Analyse non standard, Systèmes de files d'attente, Algorithme, Déviation maximale.

10.1 Définition

L'objectif général d'analyse de stabilité est l'évaluation, avec un calcul précis, des performances, de modèles, notamment du point de vue de la sûreté de fonctionnement. L'analyse de stabilité étudie ce qui se passe lorsque l'on apporte des petits changements aux modèles mathématiques. Elle intervient à deux niveaux : en conception et en exploitation. En régle générale, les méthodes de stabilité fournissent des intervalles de confiance sur les caractéristiques, évaluées par des méthodes analytiques, par rapport à un modèle idéal. Plusieurs définitions de la stabilité peuvent être adoptées selon le système considéré, le modèle utilisé, l'objectif du problème, ... On distingue plusieurs classes de systèmes : stables (toujours stables), instables (toujours instables), à stabilité inconditionnelle, réguliers,...

10.2 Approximation par la méthode MSF

Nous présontons un algorithme général d'approximation d'un système réel par un modèle idéal. Il permet de vérifier les conditions d'approximation et de déterminer l'erreur d'approximation.

```
DEBUT Détermination du domaine de stabilité forte;
SI toutes les conditions vérifiées ALORS
  Détermination du domaine d'approximation;
    SI toutes les conditions vérifiées ALORS
    /*Approximation validée*/;
    Calculer l'erreur d'approximation;
    SINON
    /*Approximation impossible*/;
    FINSI;
SINON
 /* Système instable ⇒ Approximation impossible*/;
FINSI;
FIN.
```

10.3 Application : Système $M_2/G_2/1$ avec priorité HOL

Considérons un système $M_2/G_2/1$ (FIFO, ∞) avec priorité non preemptive (HOL : Head Of the Line) dont :

– Le flot des arrivées des requêtes prioritaires est poissonnien de paramètre $\lambda\theta$;
– Le flot des arrivées des requêtes non prioritaires est poissonnien de paramètre λ ;
– La distribution de la durée de service des requêtes prioritaires $B_1(\cdot)$;
– La distribution de la durée de service des requêtes non prioritaires $B_2(\cdot)$.

Soient π_θ (resp. π_0) la distribution stationnaire du nombre de requêtes dans le système $M_2/G_2/1$ (resp. dans le système $M/G/1$: modélisant les requêtes non prioritaires).

Théorème 10.1 *[1] Supposons que dans un système d'attente $M_2/G_2/1$ avec priorité HOL, les conditions suivantes soient vérifiées.*

1. $\lambda\mu < 1$,

2. $\exists a > 0$, *tel que* $\int_0^\infty dB_2(u)e^{au} < \infty$.

Alors, $\forall\ \beta$ *et* α, $1 < \beta < \beta_0$, $1 < \alpha$ *et pour tous les* θ *tels que*

$$0 \leq \theta \leq \min\{\alpha - 1, \beta - 1, \frac{1-\rho}{D(1+W)}\}$$

on a l'estimation

$$\|\pi_\theta - \pi_0\|_{\mathrm{v}} = \sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 0} \alpha^i \beta^j \left|\pi(i,j,\theta) - \pi(i,j,0)\right| \leq \theta W_\theta \tag{10.1}$$

$$où \quad W_\theta = D(1+W)W(1-\rho-(1+W)\theta D)^{-1}, \tag{10.2}$$

$$W = (\beta-1)(1-\lambda\mu)\frac{\rho}{1-\rho} \ \ et \ \mu = \int_0^\infty u dB_2(u). \tag{10.3}$$

$$\alpha = \widehat{f}_1(\lambda\beta-\lambda)/\rho \quad et \quad \rho = \widehat{f}_2(\lambda\beta-\lambda)/\beta < 1 \tag{10.4}$$

$$\widehat{f}_i\,(x) = \int_0^\infty e^{xu} dB_i\,(u) \tag{10.5}$$

$$\beta_0 = \sup(\beta : \hat{f}_2(\lambda\beta-\lambda) < \beta)$$

$$D = \{\lambda\hat{f}(\lambda\beta-\lambda) + \alpha\lambda\hat{f}'\,(a) + \hat{f}(a)\}$$

$$a = \lambda\beta + \alpha\lambda\theta - \lambda\theta - \lambda$$

$$\hat{f}(a) = \hat{f}_1(a) + \hat{f}_2(a)$$

Commentaires.

A travers le résultat précedent, il est important de remarquer que :

. Le domaine de stabilité forte depend étroitement du domaine d'approximation. En effet, plus le domaine de stabilité forte est réduit (β_0 tend vers 1, donc ρ tend vers 1), plus le domaine du paramètre θ est réduit.

. L'erreur due à l'approximation diminue avec les valeurs de θ.

10.3.1 Algorithme

```
  DEBUT
  LIRE λθ, b1(·), λ, b2(·), EPS;
  Calculer μ = ∫_0^∞ u b2(u)du; SI λμ < 1 ALORS
    /*Déterminer le domaine d'approximation */
    Calculer [β_min; β_max];
    SI β_min < β_max ALORS
      /*Calculer l'erreur d'approximation:*/
      E_min = min{E(β), β ∈ [β_min; β_max]} = E(β_ideal) ;
  SINON
    ECRIRE''Approximation impossible'';
  FINSI;
SINON ECRIRE ''Système instable'';
FINSI;
FIN.
```

L'erreur due à l'approximation est alors telle que

$$\sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 0}\alpha^{i}_{ideal}\beta^{j}_{ideal}\left|\pi(i,j,\theta)-\pi(i,j,0)\right|\leq E_{min}$$

où α_{ideal} est obtenu en utilisant l'équation (10.4).

10.3.2 Application

Choisissons $b_1(\cdot)=Cox(10,0.5,5)$; $b_2(\cdot)=Cox(20,0.5,10)$; $\lambda=0.5$; $EPS=0.0001$; puis faisons varier le paramètre $\lambda\theta$ (flot prioritaire) car la perturbation du système $M/G/1$ classique est liée à celui-ci.
Les résultats obtenus par exécution de l'algorithme sont représentés par les deux courbes ci-dessous.

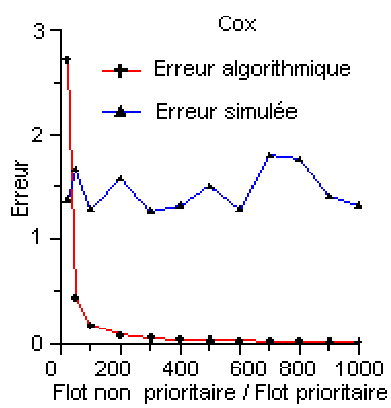

Figure 10.1. Courbes comparatives des erreurs

Références

1. D. Aissani, Application of the operators methods to obtain inequalities of stability in the $M_2/G_2/1$ system with a relative priority. 3ème Colloque Maghrébin sur les Modèles Numériques de l'Ingénieur, Vol. 2 (1991) 790-795.
2. L. Bouallouche et D. Aïssani, Performance Evaluation of an SW Communication Protocol. Proceedings of the MCQT'02 (International Conference On Queueing Theory), Madrid(Spain), July (1973) pp.18.
3. A.E. Hurd (ed.), *Nonstandard Analysis : recent developements.* Springer, New york (1983).