Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 2, 2004, pp. 47 - 58

9

Quelques réflexions sur la stabilité des modèles stochastiques

D. AISSANI[1] and al.*

LAMOS, University of Bejaïa, 06000 (Algeria)
lamos_bejaia@hotmail.com

Résumé Les problèmes de stabilité des modèles stochastiques sont plus que jamais d'actualité, comme le prouve l'organisation annuelle d'une Conférence Internationale spécialisée (celle de 2004 aura lieu à Vilnius - Lituanie en septembre prochain), ainsi que la publication régulière d'un numéro spécial du *Journal of Mathematical Sciences* (Kluwer Academic Publishers). L'objectif de cet exposé est de situer la place de l'approche de stabilité forte au sein des tendances actuelles de recherche dans le domaine de la stabilité (ou de la continuité) des Modèles Stochastiques. Il s'agit également de faire quelques remarques sur les travaux réalisés (sur les problèmes de stabilité) ces dernières années au niveau du Laboratoire LAMOS, puis de discuter les éventuelles perspectives de recherche.

Mots clés : Modèles stochastiques, stabilité, continuité, approche de stabilité forte.

Les problèmes de stabilité des modèles stochastiques sont plus que jamais d'actualité, comme le prouve l'organisation annuelle d'une Conférence Internationale spécialisée (celle de 2004 aura lieu à Vilnius - Lituanie en septembre prochain), ainsi que la publication régulière d'un numéro spécial du *Journal of Mathematical Sciences* (Kluwer Academic Publishers). L'objectif de cet exposé est de situer la place de l'approche de stabilité forte au sein des tendances actuelles de recherche dans le domaine de la stabilité (ou de la continuité) des Modèles Stochastiques. Il s'agit également de faire quelques remarques sur les travaux réalisés (sur les problèmes de stabilité) ces dernières années au niveau du Laboratoire LAMOS, puis de discuter les éventuelles perspectives de recherche. Pour ce faire, nous précisons d'abord l'intérêt pratique des problèmes de stabilité (§.1), puis rappelons les fondements théoriques de l'approche de stabilité forte (§.2). Après le rappel de la définition (§.3), nous énumérons les paramètres " perturbables " (§.4), ainsi que les systèmes spécifiques considérés (§.5).

∗. Kartashov N. V., Bouallouche L., Benaouicha M., Berdjoudj L., Mouhoubi Z., Lekadir O., Rabta B., Barèche A., Rahmoune F., Abbas K., Mahaman Salissou M.S., Mecheri K., Boukir L., Hamadouche N.

9.1 Stabilité des Systèmes Complexes

La demande constante d'élévation de l'efficacité de fonctionnement des systèmes pose aux constructeurs et aux exploitants de ces systèmes une série de problèmes sérieux, liée, en particulier au début du projet, à la réalisation d'une analyse qualitative et quantitative d'efficacité de fonctionnement (entre autre, à une étude de l'ergodicité et de la stabilité).

En effet, l'un des problèmes qui apparaissent lors de la conception et de l'exploitation des systèmes complexes est justement l'analyse de la stabilité de leur fonctionnement. La résolution de ce problème permet d'établir à quel point le processus de fonctionnement réel du système correspond à celui étudié dans les calculs.

Précisons ici qu'il existe plusieurs définitions de la notion de stabilité (au sens Loynes, au sens Liapounov,...). Les différentes formes de stabilité décrivant le comportement du système complexe sont choisies en fonction du problème à résoudre et de la fonction du système. Ainsi, un système peut être stable par rapport à une définition et ne pas être stable par rapport à une autre définition. De même qu'un système peut être stable par rapport à certaines perturbations dans le sens d'une définition et ne pas être stable au sens d'un autre définition.

9.2 Ergodicité uniforme et stabilité forte des chaînes de Markov

Dans un premier temps, nous rappelons les concepts d'ergodicité uniforme et de stabilité forte des chaînes de Markov, par rapport à des normes données dans les espaces de mesure et de noyaux de transition [15], [20]. Nous discutons un certain nombre de conditions nécessaires et suffisantes pour l'ergodicité et la stabilité, ainsi que l'équivalence de ces concepts (cf. [3]). Ces concepts avaient généralisé les notions de base des chaînes à noyau de transition quasi-compact ([22], (chap. 5)), ([26], (chap. 6)) et des chaînes récurrentes fortement positives [16]. Les nombreux exemples traités (voir bibliographie) prouvent qu'une large classe de chaînes de Markov (de type Marches aléatoires) n'ont pas la propriété de récurrence fortement positive et ne sont pas quasi-compactes. Cependant, ces chaînes sont uniformément ergodiques pour un choix judicieux de la norme poids. A ce niveau, il est intéressant de réaliser une étude sur les méthodes de construction des fonctions poids. En effet, le choix de la norme correspondante (convenable) conduit à rechercher une fonction r-excessive v (cf. [3]).

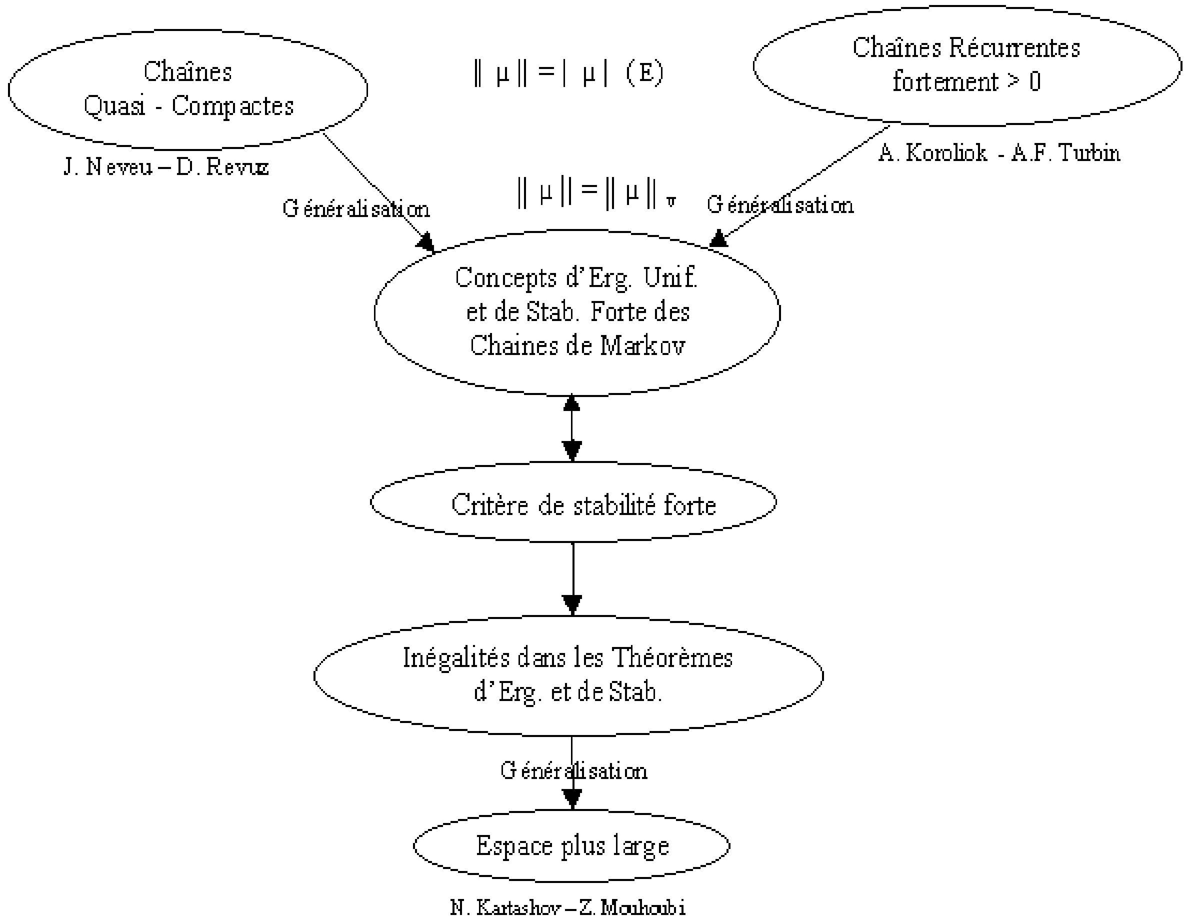

Fig.1: Fondements Théoriques de l'Approche des Opérateurs de la Théorie de Stabilité

Dans un deuxième temps, nous rappelons également le critère de stabilité forte. A ce niveau, il est important de bien comprendre la signification " physique " de certaines conditions (condition de perturbation, vitesse de convergence, retour des états lointains). Pour la norme égale à la variation totale, les conditions du théorème sont équivalentes aux conditions de Doeblin pour le noyau quasi-compact (cf. [22]).

Dans un troisième temps, nous nous attardons sur les possibilités de généralisations (cf. [15], [20], [21]). Nous savons que les concepts avaient été utilisés pour obtenir de nouveaux théorèmes limites sur la base de la méthode analytique de la théorie de perturbation (cf. Le livre de base de Tosio Kato). Des inégalités avec un calcul exact des constantes ont été obtenus. Pour avoir des perspectives, ces possibilités de généralisation (affaiblissement des conditions, espaces plus généraux, démonstrations non construites sur un même schéma) doivent être illustrées par des applications. De cette manière, les résultats appliqués seront nouveaux. Ainsi, pour un exemple de type "marche aléatoire", les estimations quantitatives dans les théorèmes d'ergodicité et de stabilité des chaînes de Markov ont été obtenus [21].

9.3 Stabilité des Modèles Stochastiques

a) ***Modèles stochastiques :***

Le terme " Modèle stochastique " concerne les modèles mathématiques de files d'attente, de fiabilité, de gestion des stocks, de planification des expériences et autres domaines de la théorie des probabilités appliquées dans lesquels des influences aléatoires agissent. Un consensus n'a pas encore été trouvé pour les exprimer mathématiquement. Néanmoins, on distingue deux types de modèles stochastiques :

1. **Modèles " finis :** Ce sont des modèles dont le comportement peut être décrit par N variables aléatoires $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_N$. Suivant la structure du modèle, les X_i peuvent désigner des quantités qui varient simultanément, l'une après l'autre ou d'une autre manière, et lorsque elles terminent toutes leurs variations, la vie du système se termine. Le problème général est de considérer les propriétés d'une variable aléatoire Z décrivant le comportement du système et ayant la forme
$$\mathrm{Z} = \varPhi(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_N) \tag{9.1}$$
pour une application appropriée $\varPhi$.
2. **Modèles „Récursifs" :** Soit une séquence infinie de variables aléatoires $\{\mathrm{X}_n\}$ décrivant les influences aléatoires sur le système aux instant t_n (déterministes ou aléatoires), avec $t_n < t_{n+1},\ n = 1, 2, \ldots$ L'état du système à l'instant t_{n+1} est décrit par une variable aléatoire Z_{n+1} donnée par la formule récursive
$$\mathrm{Z}_{n+1} = \varphi_n(\mathrm{Z}_n, \mathrm{X}_n) \tag{9.2}$$
où les φ_n sont des applications appropriées. Des exemples de modèles d'attente et de gestion de stocks sont donnés dans [27].

b) ***Propriétés qualitatives :***

Etudier mathématiquement les modèles stochastiques, c'est obtenir des estimations des quantités qui, pour un modèle $\sum$ donné, avec une structure spécifique et des distributions F_i des X_i, décrivent son comportement.

Soit $C_{\sum}$ une certaine caractéristique du modèle $\sum$ et soit $\mathbf{C}_{\sum}$ l'ensemble des valeurs possibles de $C_{\sum}$. Pour une structure et une distribution initiale données, $C_{\sum}$ dépend uniquement des F_i et on écrit

$$C_{\sum} = C_{\sum}(F_1, F_2, \ldots) \in \mathbf{C}_{\sum}$$

Pour des modèles simples, on peut déduire une expression explicite de $C_{\sum}$. Cependant, dans plusieurs situations, cela n'est pas possible et les calculs mathématiques peuvent mener à des formules compliquées et qui ne peuvent pas être exploitées en pratique.

De telles circonstances nous suggèrent de rechercher les propriétés qualitatives de $C_{\sum}$ par rapport aux F_i , i.e , la manière avec laquelle $C_{\sum}$ est affectée par les changements en F_i .

Les principales propriétés qualitatives des modèles stochastiques incluent l'invariance (i.e, pour des espérances mathématiques fixées, une déviation des F_i n'a pas d'influence sur $C_{\sum}$), la monotonie (i.e, un " accroissement " des F_i dans un certain sens, entraîne un " accroissement " de $C_{\sum}$), et la stabilité (i.e, de petites perturbations dans les F_i entraînent de petites perturbations de $C_{\sum}$). A l'aide des propriétés qualitatives, on peut obtenir des formules pour les estimations ou bien choisir concrètement des approches d'approximation (cf. [27]).

c) ***Position du problème :***

Soient $\sum$, $\sum_k (k = 1, 2, \ldots)$, des modèles stochastiques de même structure, de distributions dirigeantes E_m et $\mathrm{E}_{m,k} (m = 1, 2, \ldots), C_{\sum}$ une certaine caractéristique du modèle $\sum$.

Nous comprendrons par $\mathcal{B}_m (m = 1, 2, \ldots)$ l'espace des distributions dirigeantes $\mathrm{E}_m \in \mathcal{B}_m$ et soient $\overrightarrow{m}$ la convergence d'un certain type sur $\mathcal{B}_m$, $\overrightarrow{C}$ la même forme de convergence sur l'espace image $C_{\sum}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots)$. Nous nous intéressons à la vérification de la relation suivante

$$\mathrm{E}_{m,k} \underset{\overrightarrow{m}}{\rightarrow} \mathrm{E}_m \Rightarrow C_{\sum} (\mathrm{E}_{1,k}, \ldots) \underset{\overrightarrow{C}}{\rightarrow} C_{\sum}(\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots) \tag{9.3}$$

Si cette relation est vérifiée, nous dirons que les caractéristiques $C_{\sum}$ sont stables (ou continues) pour E_m

d) ***Stabilité forte :***

L'applicabilité de la méthode de stabilité forte a été prouvée pour différentes classes de modèles stochastiques. Un cycle de recherche a déjà été réalisé pour la systèmes de files d'attente (cf. paragraphe suivant). Cependant, les recherches sont encore à un stade embryonnaire pour les autres classes : Réseaux de Files d'Attente (perturbation de la durée de service du premier serveur) [17], gestion des stocks (perturbation de la loi de commande) [23] et théorie de fiabilité (perturbation du taux de panne [1], et du taux de vacances [24]).

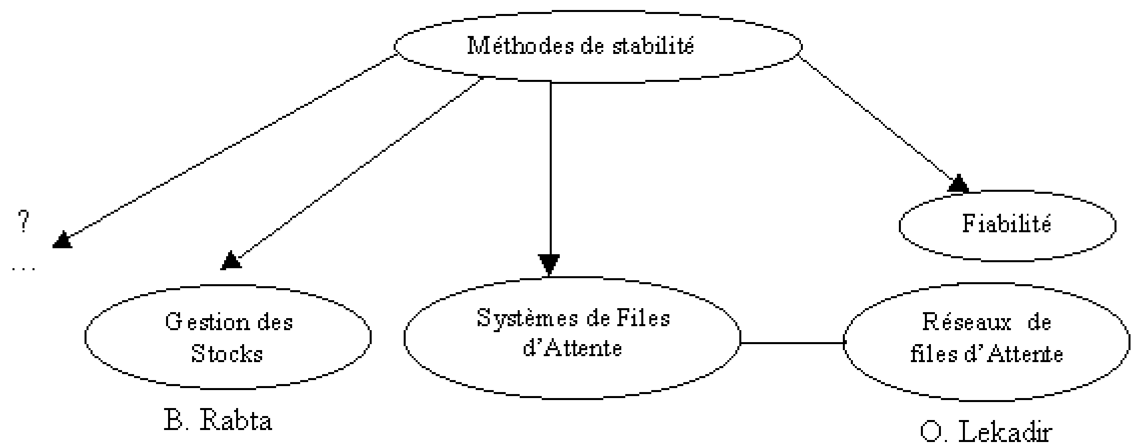

Fig. 2 : Applicabilité aux Modèles Stochastiques

Les perspectives de recherche les plus intéressantes (et les plus complexes) concernent les autres types de modèles stochastiques. A ce niveau, il est nécessaire de réaliser au préalable une étude bibliographique complète.

9.4 Stabilité des systèmes de files d'attente

L'une des particularités de la théorie des files d'attente est l'étude des processus probabilistes de type spéciaux. En TFA, une place particulière est occupée par les méthodes d'analyse asymptotique des processus de service. La théorie de stabilité (ou de continuité) des SFA appartient à l'analyse asymptotique des processus de service

a) ***Intérêt :*** En règle générale, les valeurs des paramètres de départ des systèmes ne sont connues qu'approximativement (elles sont définies sur la base de méthodes statistiques), ce qui conduit à des erreurs pour le calcul des caractéristiques recherchées. C'est pourquoi dans la pratique, les inégalités de stabilité sont utilisées pour estimer numériquement l'erreur de définition des caractéristiques recherchées, pour de petites perturbations des paramètres de ces systèmes.

Par stabilité d'un système, nous comprenons une dépendance continue des caractéristiques de fonctionnement de ce système par rapport à ses paramètres. En théorie de stabilité, nous clarifions les conditions pour lesquelles, pour tel système d'attente, de petites déviations dans la distribution des suites dirigeantes entraînent de petites déviations dans la distribution des caractéristiques stationnaires et non stationnaires des systèmes que nous considérons. En d'autres mots, nous clarifions les conditions pour lesquelles la proximité (d'une manière ou d'une autre) des suites dirigeantes entraînent la proximité des caractéristiques étudiées.

b) ***Particularité de la méthode de stabilité forte :***

Depuis l'article de Rossberg en 1965, les auteurs ont formulé différentes positions du problème et proposé différentes approches (cf. [9], [13], [25], [28],. . .). A la différence de ces approches, nous supposons que la perturbation du noyau de transition est petite par rapport à une certaine norme d'opérateurs. Cette condition, beaucoup plus stricte que les conditions habituelles, permet d'obtenir essentiellement de meilleurs approximations pour les distributions stationnaires perturbées. De plus, sur la base de cette méthode (de stabilité forte), il est possible d'obtenir une décomposition asymptotique pour les caractéristiques stationnaires des chaînes perturbées.

c) ***Méthodologie générale :***

Elle est basée sur l'approche opérationnelle de la théorie de stabilité. A la chaîne de Markov qui décrit le système de files d'attente est mis en correspondance son opérateur de transition dans l'espace des mesures, puis, l'on choisit la norme dans cet espace de telle sorte qu'elle soit fortement v-stable.

d) ***Perturbation des paramètres :***

Dans un premier temps, la perturbation a concerné le flot des arrivées [4], la distribution de service [7] et la structure du système [19]. Un algorithme a été élaboré afin d'estimer l'erreur d'approximation, et donc de mesurer les performances du système [10], et ce, même dans le cas où la fonction densité (caractérisant la loi des arrivées ou des durées de service) est inconnue [6].

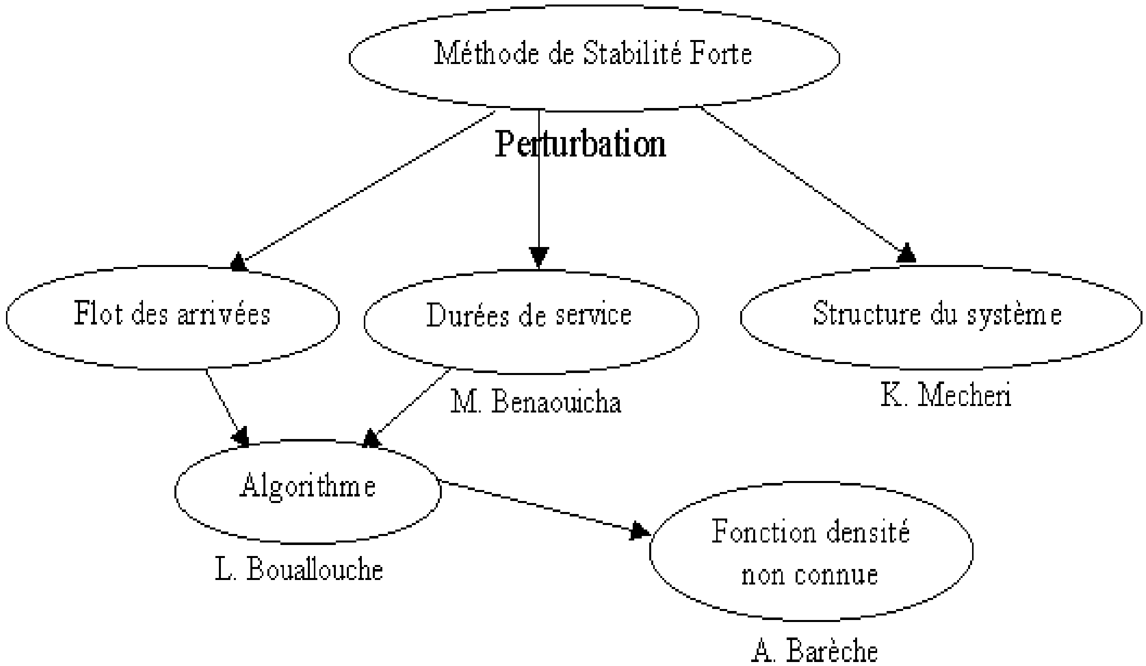

Fig. 3 : Classes de Systèmes d'Attente Spécifiques

La perturbation de ces paramètres de base des SFA peut encore mettre en évidence de nombreux problèmes ouverts intéressants. Il s'agit notamment des systèmes ayant un intérêt pratique spécifique, ainsi que tous les systèmes pouvant être utilisés dans l'étude de la stabilité des Réseaux (en particulier lorsque la formule produit peut être appliquée).

A ce niveau, il est nécessaire de faire quelques remarques. Tout d'abord, la démarche de démonstration du troisième cas (perturbation de la structure du système) est différente de celle des deux premiers cas. Dans ces derniers, au lieu d'appliquer les concepts, c'est le critère de stabilité forte qui a été à la base des démonstrations. Les différentes étapes intermédiaires nécessaires constituent des recherches qui ont un intérêt particulier.

D'un autre côté, les frontières d'application des résultats obtenus doivent être déterminé avec précision. Par exemple, faut-il toujours, pour pouvoir appliquer la méthode des opérateurs, toujours vérifier la condition de type condition de Cramer $(\rho(\gamma) < 1)$? Par ailleurs, est-il possible d'affaiblir la condition d'ergodicité géométrique ? Enfin, à la manière de [2], il est important de mettre en évidence toutes les conséquences possibles des inégalités de stabilité avec un calcul exact des constantes.

c) ***Classes de systèmes de files d'attente spécifiques :***

La méthode a également été appliquée à des classes spécifiques de systèmes de files d'attente : systèmes avec rappels, systèmes avec priorité, systèmes non fiables, systèmes avec vacances. La perturbation a concerné l'intensité de service [18], le paramètre de rappels [8] et le taux de vacance [24].

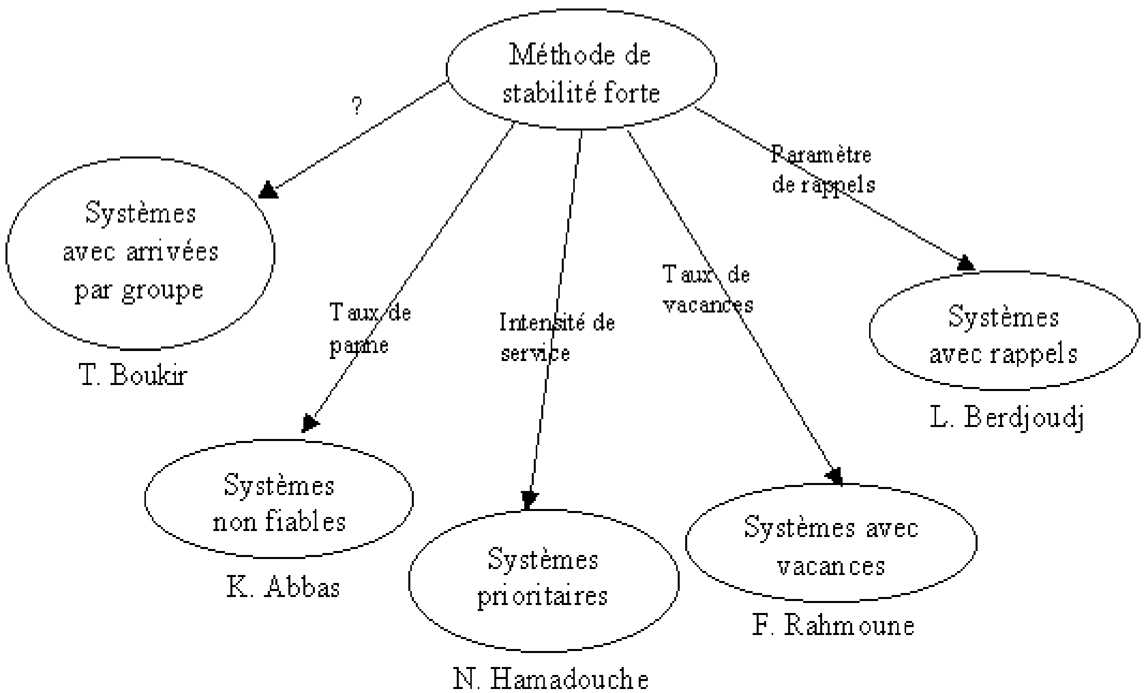

Fig. 4 : Classes de Systèmes d'Attente Spécifiques

L'intérêt de l'étude sur les systèmes non fiables était intéressante dans la mesure ou la chaîne induite (décrivant le système étudié) était une chaîne triple.

f) ***Quelques problèmes ouverts :***

Chacune des classes de SFA spécifiques fait partie aujourd'hui des domaines de recherche les plus actuels, en raison des possibilités d'application aux problèmes réels. C'est le cas par exemple des systèmes avec rappels, qui font régulièrement l'objet de publications d'articles de synthèses (Falin, Aïssani, Artalejo) et de l'organisation d'un Workshop spécialisé (le prochain aura lieu cette année en Corée).

Dans chacune de ces classes, il est possible de réaliser un cercle de recherche, en prenant en compte leur spécificité. Ainsi, pour les systèmes non fiables, l'étude la plus originale sera probablement de considérer la perturbation du taux de panne. Des études sont également possible pour d'autres classes de systèmes spécifiques. C'est par exemple le cas des systèmes à arrivées par groupes ou la perturbation peut concerner la loi décrivant la taille des groupes [11]. Il y a lieu également de calculer (lorsque cela est possible) les caractéristiques des systèmes perturbés. C'est le cas par exemple de la distribution de la taille de la file dans le système $M_2/G_2/1$ avec priorité relative qui peut être calculé explicitement en termes de fonctions génératrices et de transformées de Laplace. A ce niveau, il y a lieu de tenter une étude comparative (même théorique).

9.5 Perspectives

Les investigations dans le domaine de la stabilité des modèles stochastiques sont d'actualité, notamment en raison du fait que la question de la qualité des estimations obtenues est encore ouverte. La méthode de stabilité forte a un avantage du fait qu'elle permet l'obtention des inégalités de stabilité avec un calcul exact des constantes.

La poursuite des investigations doit se faire suivant une stratégie de recherche précise (suite logique entre les travaux, spécificités et liens entre les problèmes). Il faut tenter de traiter les cas de systèmes qui sont d'actualité (notamment du point de vue des applications pratiques) et pour lesquels il n'existe pas encore de résultats analytiques. Les résultats les plus intéressants seront ceux qui pourront être obtenus en utilisant des démonstrations spécifiques.

Dans l'immédiat, ce qui nous paraît le plus important, c'est de compléter l'étude bibliographique sur les méthodes de stabilité et de s'ouvrir sur les autres méthodes d'approximation, en particulier dans l'étude des cas ou il n'existe pas encore de résultats analytiques. En effet, à ce niveau, les méthodes d'approximation, les méthodes numériques et la simulation sont les seules approches possibles.

Il est également important de tenter une application aux systèmes complexes. Le cas le plus intéressant est les Réseaux de Télécommunication, car notre laboratoire commence à comprendre la " philosophie " spécifique de ces systèmes. Ceci a été possible après la concrétisation d'un accord - programme Algéro - Français entre les laboratoires LAMOS Béjaïa et LIM Marseille, ainsi qu'après la mise en œuvre de plusieurs thèses (Imloul-Arezki, Dehas, Taghzouti-Mekaouche, Touati - Hadji, Imloul, Aïssani-Adel). Une première tentative a été réalisée pour l'évaluation des performances des systèmes informatiques (cf. [10]). Pour que ce projet devienne effectif, il faudrait néanmoins commencer par avancer dans l'application de la méthode aux réseaux de files d'attente et aux systèmes à plusieurs canaux.

Conclusion

Les recherches réalisées ces dernières années concernant la méthode de stabilité forte ont permis d'enregistrer d'énormes progrès dans l'extension des fondements théoriques et dans l'applicabilité (du point de vue théoriques) à plusieurs classes spécifiques de systèmes d'attente et autres types de modèles stochastiques (stocks, fiabilité). Cependant, l'avancée la plus considérable consiste à la mise en place d'une démarche rationnelle de traitement de cas concrets de la pratique. Des exemples numériques ont notamment confirmé la puissance de la méthode. C'est pourquoi ces résultats, devenus classiques, nécessitent une grande résonance. A cet effet, il y a lieu de réaliser un travail d'investigation sur les revues spécialisées et surtout de rédiger une monographie sur la question.

Références

1. Abbas K., *Stabilité Forte dans un Système de Files d'Attente M/G/1 à Serveur Non Fiable* . Thèse de Magister en Mathématiques Appliquées, Département Informatique et Recherche Opérationnelle, Université de Béjaia, Octobre 2003.
2. Aïssani D., *Estimate of the strong Stability in an M/G/1 System*, VINITI N° 4119 - 82, R. Journal *Matematika*, IB 83, 1982.
3. Aïssani D. and Kartashov N.V., *Ergodicity and Stability of Markov Chain with respect to Operator Topology in the Space of Transition Kernels.* Comptes Rendus Acad. Sciences U.S.S.R, ser. A, *Math-Phys-Tech*, N° 11, 1983, pp. 3 - 5.
4. Aïssani D. and Kartashov N.V, *Strong stability of the imbedded Markov Chain in an M/G/1 System.* International Journal. *Theory of Probability and Mathematical Statistics,* American Mathematical Society, N° 29, 1984, pp. 1 - 5.
5. Aïssani D., Séminaire *" Processus Stochastiques et Applications ",* Fond National de la Recherche Scientifique de Belgique - Université de Bruxelles, Mars 1993.
6. Barèche A., *Sur les problèmes statistiques en files d'attente.* Thèse de Magister en Mathématiques Appliquées, Département Informatique et Recherche Opérationnelle, Université de Béjaia, Mars 2003.
7. Benaouicha M. et Aïssani D., *Estimate of the Strong Stability in the G/M/1 Queueing System.* In the Book **"Applied Stochastic Models and Data Analysis",** G. Govaert, J. Janssen and N. Limnios Editors, Compiègne 2001, Vol. I, pp. 172 - 177.
8. Berdjoudj L. and Aïssani D., *Strong Stability in Retrial Queues, International Journal Theory of Probability and Mathematical Statistics,* N°68, 2003, pp. 11 - 17.
9. Borovkov A.A., *Méthodes Asymptotiques en Théorie des Files d'Attente.* Moscou, Nauka Ed., 1980.
10. Bouallouche L. and Aïssani D., *Performance evaluation of an SW Communication Protocol (Send and Wait),* Proceedings of the ***MCQT'02*** *(First Madrid International Conference on Queueing Theory),* Madrid (Spain), July 2002, pp. 18 and others.
11. Boukir L., *Stabilité Forte dans les Systèmes à Arrivées par Groupe.* Thèse de Magister en Mathématiques Appliquées, Département Informatique et Recherche Opérationnelle, Université de Béjaia, (en cours).
12. Hammadouche N.,*Sur la Stabilité Forte dans les Systèmes Prioritaires.* Thèse de Magister en Mathématiques Appliquées, Département Informatique et Recherche Opérationnelle, Université de Béjaia, (en cours).
13. Kalashnikov V.V., *Analyse Qualitative du Comportement des Systèmes Complexes par la Méthode des Fonctions Tests,* Moscou, Nauka Ed., 1978.
14. Kartashov N.V., *Strongly Stable Markov Chains.* Journal Soviet. Mat., 34, pp. 1493 - 1498.

15. Kartashov N.V., *Strong Stable Markov Chains,* VSP, Utrecht, TbiMC Scientific Publishers, 1996.

16. Koroliok V.S. et Turbin A.F., *Processus Semi-Markoviens et Applications,* Nauka Dumva Ed., Kiev, 1976.

17. Lekadir O. and Aïssani D., *Strong stability in a Jackson network with two tandem stations.* Proceedings of the *XXII International Seminar on Stability Problems for Stochastics Models,* Varna (Bulgaria), May 2002.

18. Mahaman Salissou M.S., Bouallouche L. and Aïssani D., *Measure of Performance of the Strong Stability Method in a Priority and Retrial Queueing Systems.* To appear.

19. Mecheri K., *Inégalités de Stabilités dans un Système*$G/M/\infty$, Thèse en cours, U.S.T.H.B. Alger (voir également, Aïssani D., *Strong Stability of an Embedded Markov Chain in an* $G/M/\infty$ *System International Journal Technologies Avancées,* Vol. 2, N°1, 1992, pp. 28 - 33).

20. Mouhoubi Z. and Aïssani D., *Quantitative Estimates of the Uniform Ergodicity for Markov Chain.* Proceedings of the 8-th International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics, Vilnius, June 2002, pp. 10 - 11.

21. Mouhoubi Z. and Aïssani D., *Uniform Ergodicity and Strong Stability Estimates of Waiting Process,* ***Bulletin of the International Statistical Institute,*** Vol. LX, Book 2, Berlin, 2003, pp. 97 - 98.

22. Neveu J., *Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités,* Masson et Cie Ed., Paris, 1964.

23. Rabta B. and Aïssani D., *Strong Stability in an Inventory Model,* Proceedings of the International Summer Seminar **Dynamic ad Stochastic Models,** Sudak (Ukraine), Math. Inst. of Acad. of Sciences Ed., 2003, pp. 79 - 80

24. Rahmoune F., *Stabilité Forte dans un Système d'Attente M/G/1/N avec Vacances.* Thèse de Magister en Mathématiques Appliquées, Département Informatique et Recherche Opérationnelle, Université de Béjaia, Octobre 2003.

25. Ratchev S.T., *The Problem of Stability in Queueing Theory,* International Journal Queueing Systems, 4, 1989, pp. 287 - 318.

26. Revuz D., *Markov Chains,* Elseiver Ed., North Holland, 1975.

27. Stoyan D., *Comparison Methods for Queues and other Stochastic Models,* Wiley, N.Y., 1983.

28. Zolotariev V.M., *Sur la Continuité des Suites Stochastiques Engendrées par des Procédures Récurrentes.* International Journal of *Theory of Probability and its Applications,* T. 20, N° 4, 1975, pp. 834 - 847.