Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 2, 2004, pp. 33 - 39

7

Analyse du système M/G/1 avec rappels et arrivées négatives par la méthode de la variable supplémentaire

L. BERDJOUDJ[1]

LAMOS Université de Béjaia.
l_berdjoudj@yahoo.fr

Résumé Dans ce travail, on considère l'anlyse du système M/G/1 avec rapplels et arrivées négatives, dans le cas où l'arrivée négative élimine un seul client positif, via la méthode de la variable supplémentaire. Les fonctions génératrices partielles des distributions de probalilités cojointes ont été obtenues. Néaumoins ces résultats sont complexes et ne sont pas exploitables en pratiques.

Mots clés : File d'attente, rappels, variable supplémentaire.

7.1 Introduction

il est apparu ces dernières années, dans la littérature des files d'attente, des travaux portant sur les systèmes de files d'attente caractérisée par la présence de deux types d'arrivées. D'un côté, les arrivées positives ou régulières qui ont pour objectif l'occupation du service. De l'autre côté les arrivées négatives, dont la présence dans le système de file d'attente affecte ce dernier de différentes manières.

Différentes possibilités ont été introduites dans la littérature à ce sujet :

- **Elimination individuelle** : Si une arrivée négative entre dans un système d'attente non vide, elle éliminera un client positif (ordinaire). Une arrivée négative entrant dans un système vide est sans effet.
- **Elimination par groupe** : Une arrivée négative contraint un groupe de clients à quitter le système.
- **Le désastre (la catastrophe)** : L'arrivée négative a l'effet d'une catastrophe sur le système où elle entre. En d'autres termes tous les clients sont automatiquement éliminés.
- **Elimination d'une quantité aléatoire d'activité** : Instantanément, à l'arrivée d'un client négatif, une quantité aléatoire d'activité est éliminée du système.

L'intérêt porté à cette nouvelle famille de réseaux de files d'attente avec arrivées négatives, introduite par Gelenbe [2], était motivée initialement, par la modélisation des réseaux de neurone où les arrivées positives et négatives représentent les signaux excitateurs, qui font croître le potentiel du neurone et sa tendance à produire une impulsion et inhibiteurs, qui diminuent le potentiel du neurone et sa tendance à produire une impulsion, respectivement. Puis leurs domaines d'application se sont étendus pour toucher d'autres systèmes plus complexes comme les réseaux informatiques avec infection par virus, élimination des transactions dans les bases de données, les systèmes de telecommunication, les systèmes de production, etc.

E. Gelenbe, P. Glynn, K. Sigman [3] ont considéré un système de file d'attente avec arrivées négatives sous la discipline FCFS, ils ont constaté que la condition de stabilité, dépend au delà des taux de service et d'arrivée, des distributions de temps de service et de temps inter-arrivées. Ils ont supposé que les éliminations se font avec les deux politiques suivantes :

RCE : Le client positif occupant la dernière place dans la file au moment de l'entrée du client négatif est éliminé.

RCH : Le client en tête de la file (celui qui est en service) est éliminé au moment de l'arrivée du client négatif.

Dans cette communication on s'intéresse au cas où une arrivée négative élimine un seul client positif.

7.2 Analyse du système M/G/1 avec rappels et arrivées négative par la méthode de la variable supplémentaire

7.2.1 Description mathématique du modèle

On considère un système de file d'attente $M/G/1$ avec deux types d'arrivées suivant deux lois de Poisson indépendantes avec les taux $\lambda > 0$ et $\delta \geq 0$, correspondants aux arrivées positives et négatives, respectivement. Un client primaire occupe le serveur s'il le trouve libre à son arrivée et quitte le système juste après la completion de son service. Dans le cas où il le trouve occupé, il rejoint l'orbite. Ces clients insatisfaits forment un pool où seul le client sélectionné suivant une certaine règle pourra accéder au service. Les intervalles de temps décrivant les rappels sont supposés indépendants et exponentiellement distribués avec un taux $\alpha(1-\delta_{0j}) + j\mu$, quand il y a j clients dans l'orbite. Les arrivées négatives ont l'effet d'éliminer un client positif de l'orbite, si celle-ci n'est pas vide, celui ci est sélectionné selon une politique d'élimination spécifiée.

L'existence des arrivées négatives est un mécanisme du contrôle de la congestion du système. Quand le serveur est libre un client arrivant rejoint immédiatement le service, par conséquent un niveau de congestion excessif de l'orbite est causé principalement, par ceux qui trouvent le serveur occupé à leur arrivé, ainsi on a supposé que les arrivées négatives ont de l'effet seulement dans le cas où le serveur n'est pas libre. En plus, on considère que le client en service ne peut pas être éliminé. Les temps de services sont des variables aléatoires indépendantes d'une distribution générale $B(t)$ et de fonction de densité $b(t)$.

Les arrivées positives et négatives, les intervalles de temps séparant les rappels successifs et les temps de services sont supposés mutuellement indépendants.
On définit l'indicateur d'activité $C(t)$ du serveur à l'instant t par

$$C(t) = \begin{cases} 0, \text{ si le serveur est libre au temps t}\,; \\ 1, \text{ si le serveur est occupé.} \end{cases}$$

Notons par $N(t)$ le nombre de client dans l'orbite à l'instant t et par $X(t)$ le temps de service écoulé à l'instant t. A l'instant t le système peut être décrit par le processus $Y(t)$ défini comme :

$$Y(t) = \begin{cases} (0, N(t)), & \text{si C(t) =0}\,; \\ (C(t), N(t), X(t)) & \text{si C(t) =1.} \end{cases}$$

Ce processus est défini dans l'espace $E = \{0, 1\} \times \mathbb{N} \times \mathbb{R}^+$.
Si le régime stationnaire existe, on pourra introduire les probabilités d'état du processus $Y(t), t \geq 0$ comme suit :

$$P_{0m} = \lim_{t \to +\infty} Pr(C(t) = 0, N(t) = m),\ m \geq 0,$$

et

$$P_{1m}(x)dx = \lim_{t \to +\infty} Pr(C(t) = 1, N(t) = m, x < X(t) \leq x + dx),\ m \geq 0, x \geq 0.$$

Les fonctions génératrices partielles des probabilités P_{0m} et $P_{1m}(x),\ \forall m \geq 0,\ \forall x \geq 0, \forall z \in D(0, 1)$ (le disque unité), sont définies par :

$$Q_0(z) = \lim_{t \to +\infty} \mathbb{E}\{z^{N(t)}; C(t) = 0\} = \sum_{m=0}^{\infty} z^m P_{0m},$$

$$Q_1(z, x) = \lim_{t \to +\infty} \mathbb{E}\{z^m; C(t) = 1; x < X(t) \leq x + dx\} = \sum_{m=0}^{\infty} z^m P_{1m}(x),$$

qui convergent au moins dans le disque $\{z, \mid z \mid < 1\}$.

On note par $r(t)$ la probabilité que le service se complète dans l'intervalle $[t, t + h]$ sachant qu'il ne se termine pas au temps t, i.e $r(x)h = Pr\{X \leq x + dx,\ X > x\}$. En d'autres termes ; si $B(t) < 1$ alors $r(x) = \frac{b(x)}{1-B(x)} = -\frac{\partial \ln(1-B(x))}{\partial x}$.

7.2.2 Distribution limite de l'état du système

Au temps $t+h$ le système entre dans les états suivants : $(1,m,x+h)$, $(1,m,0)$ et $(m,0)$ pour $m \geq 0$.
L'état $(1,m,x+h)$, pour $m>0$ est atteint de l'un des états suivants :

- $(1,m,x)$ sans arrivées (positives ou négatives) ni service complété avec une probabilité $1-\lambda h-\delta h-r(x)h+o(h)$.
- $(1,m-1,x)$ avec arrivée positive, avec une probabilité $\lambda h+o(h)$.
- $(1,m+1,x)$ avec arrivée négative de probabilité $\delta h+o(h)$.

$$\forall m>0, \frac{\partial P_{1m}}{\partial x} = -(\lambda+\delta+r(x))P_{1m}(x)+\lambda P_{1m-1}(x)+\delta P_{1m+1}(x). \tag{7.1}$$

L'état $(1,0,x+h)$ est atteint de l'un des états suivants :

- $(1,0,x)$ sans arrivées positives ni service complété d'une probabilité $1-\lambda h-r(x)h+o(h)$
- $(1,1,x)$ avec arrivées négatives avec une probabilité $\delta h+o(h)$

D'où

$$\frac{\partial P_{10}(x)}{\partial x} = -(\lambda+r(x))P_{10}(x)+\delta P_{11}(x) \tag{7.2}$$

L'état $(0,m), \forall m>0$ est atteint de l'un ou l'autre des états suivants :

- $(0,m)$ sans arrivées positives ni rappel, avec une probabilité $1-\lambda h-(\alpha+m\mu)h+o(h)$
- $(1,m,x)$ avec un service complété avec une probabilité $r(x)h+o(h)$

On aura alors :

$$\forall m>0 : (\lambda+\alpha+m\mu)P_{0m} = \int_0^{+\infty} r(x)P_{1m}(x)dx \tag{7.3}$$

De manière similaire, l'état $(0,0)$ à lieu dans les situations suivantes :

- $(0,0)$ sans arrivées positives avec une probabilité $1-\lambda h+o(h)$
- $(1,0,x)$ avec un service complété d'une probabilité $r(x)h+o(h)$

Cela donne l'équation

$$\lambda P_{00} = \int_0^{+\infty} P_{10}(x)r(x)dx \tag{7.4}$$

Finalement, l'état $(1,m,0)$ $\forall m \geq 0$ a lieu dans les situations suivantes :

- $(0,m+1)$ avec un rappel d'une probabilité $[\alpha+(m+1)\mu]h+o(h)$
- $(0,m)$ avec une arrivée positive d'une probabilité de $\lambda h+o(h)$

d'où l'équation

$$\forall m \geq 0 : \; P_{1m}(0) = \alpha P_{0m+1} + \mu(m+1)P_{0m+1} + \lambda P_{0m} \tag{7.5}$$

Et on ajoute à l'ensemble des équations précédentes l'équation de normalisation suivantes :

$$\sum_{m=0}^{\infty} P_{0m} + \sum_{m=0}^{\infty} P_{1m}(x)dx = 1 \tag{7.6}$$

D'où le résultat suivant :

Lemme 7.1. Pour un modèle M/G/1 avec rappels et arrivées négatives, on a les résultats suivants :

$$\frac{\partial Q_1(z,x)}{\partial x} = -[a(z) + r(x)]Q_1(z,x) + [\delta + \frac{\delta}{z}]P_{10}x \tag{7.7}$$

avec

$$a(z) = \lambda + \delta - \lambda z - \frac{\delta}{z} = (1-z)(\lambda - \frac{\delta}{z})$$

$$\mu z Q_0^{'} + (\lambda + \alpha)Q_0(z) = \alpha P_{00} + \int_0^{\infty} Q_1(z,x)r(x)dx$$

$$zQ_1(z,0) = \mu Q_0^{'}(z) + (\lambda z + \alpha)Q_0(z) - \alpha P_{00}dx$$

Lemme 7.2. P_{10} est une solution de l'équation de Fredholm de $1^{\text{ère}}$ espèce définie par

$$\int_0^{+\infty} K(z(s),x)\frac{P_{10}(x)}{Q_0(z(s))}dx = \lambda z(s), \; R(s) > 0$$

avec

$$K(z,x) = \frac{\delta}{1-B(x)}[z(1-B(x)) + b * e^{a(z)}(x) - ze^{a(z)x}]$$

$$z(s) = \frac{s + \lambda - \delta - \sqrt{(s+\lambda+\delta)^2 - 4\lambda\delta}}{2\lambda}$$

$$a(z) = (1-z)(\lambda - \frac{\delta}{z})$$

La fonction génératrice $Q_0(z)$ reste inconnue. Ainsi pour résoudre l'équation de Fredholm

$$\int_0^{+\infty} K(z(s),x)\frac{q_{10}(x)}{Q_0(z(s))}dx = \lambda z(s), \; \forall s, R(s) > 0 \tag{7.8}$$

avec $q_{10}(x) = \frac{P_{10}}{1-B(x)}$.
On doit choisir une valeur fixe de s, soit s_0 cette valeur.
On va obtenir une solution de la forme
$q_{10}(x)C_0^{-1}$ où $C_0 = Q_0(z(s_0)), \; C_0$ à déterminer.

Théorème 7.1 (Artalejo and Gomez-corral) *Les fonctions génératrices partielles des distributions de probabilité d'un système d'attente à l'état d'équilibre dans un modèle M/G/1 avec arrivées négatives et rappels sont définies par*

(i) La fonction génératrice partielle de la distribution de probabilité P_{1k} est définie par

$$Q_1(z) = \frac{\lambda z[1 - B^*(a(z))Q_0(z) + \delta[(1-z)I(z) + (z - B^*(a(z)))]]}{(\lambda z - \delta)[B^*(a(z)) - z]P_{10}} \tag{7.9}$$

(ii) si $\alpha > 0$, et $\mu = 0$ alors

$$Q_0(z) = \frac{\alpha[z - B^*(a(z))]P_{00} - z(1-z)I(z)}{(\lambda+\alpha)z - [\lambda z + \alpha]B^*(a(z))} \tag{7.10}$$

avec

$$P_{00} = C_0\lambda^{-1}\int_0^\infty \eta(x)b(x)d(x) \tag{7.11}$$

$$P_{10} = C_0\int_0^\infty (1 - B(x))\eta(x)d(x) \tag{7.12}$$

$$I(z) = C_0 H(z) \tag{7.13}$$

$$H(z) = \int_0^\infty b(x)e^{-a(z)x}\int_0^\infty \eta(t)e^{a(z)t}dtdx \tag{7.14}$$

$$\begin{aligned} C_0 = \quad & \frac{\alpha + (\lambda+\alpha)(\delta-\lambda)E_B}{1 + (\lambda+\alpha)E_B}[\delta\int_0^\infty (1 - B(x))\eta(x)dx \\ & + \frac{\alpha(1+\delta E_B)}{\lambda(1 + (\lambda+\alpha)E_B)}\int_0^\infty b(x)\eta(x)dx]^{-1} \end{aligned} \tag{7.15}$$

avec $E_B = -B^*(0)$

(iii) si $\alpha \geq 0$ et $\mu \geq 0$ alors :

$$\begin{aligned} Q_0(z) = \quad & z^{-\frac{\alpha}{\mu}}[\delta\mu^{-1}\int_1^z \mu^{\frac{\alpha}{\mu}-1}S(u)W(u)du + \\ & + \alpha\mu^{-1}P_{00}\int_1^z u^{\frac{\alpha}{\mu}-1}W(z,u)du + P_0[W(1,z)]^{-1}] \end{aligned} \tag{7.16}$$

avec $W(u,y) = exp[\int_u^y \frac{\lambda - B^*(a(z))}{\mu[z - B^*(a(z))]}dz]$, $S(z) = \frac{(z-1)(z)}{z - B^*(a(z))}$

$$P_0 = \frac{1 - \lambda + \delta P_{10}}{1 + \delta E_B}E_B \tag{7.17}$$

où $\eta(x)$ est la solution de l'équation intégrale de Fredholm de $1^{ère}$ espèce définie dans le lemme (7.2).

7.3 Conclusion

Dans ce travail nous avons passé en revue les différents travaux réalisés sur les systèmes de file d'attente avec rappels et arrivées négatives et nous avons modélisé un système de file d'attente M/G/1 avec rappels et arrivées négatives à l'aide de la méthode de la variable supplémentaire.
La complexité de l'analyse nous a contraint à passer par deux lemmes avant d'énnoncer le théorème donnant les fonctions génératrices partielles $Q_0(z)$ et $Q_1(z)$ des distributions de probabilité conjointes du nombre de clients dans l'orbite et de l'état du serveur. Telles expressions sont entièrement déterminées par la probabilité $P_{10}(x)$ qui est solution de l'équation intégrale de Fredholm de première espèce dont la résolution est fréquemment considérée comme problème improprement posé.

Comme perspective de ce travail, on propose d'analyser le système M/G/1 avec rappels et arrivées négative par la méthode des martingales à temps continu (voir[5]et[1]) puis comparer les résultats avec les résultats de la méthode de la variable supplémentaire donnés dans le théorème ci-dessus.

Références

1. L. Berdjoudj and D. Aissani. Martingale Methods for Analysing the M/M/1 Retrial Queue with Negative Arrivals. *Proceeding of the XXIII International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models*, Pomplona (Spain) :45–50, 12-17 May 2003.
2. E. Gelenbe. Random Neural Networks with Negative and Positive Signals and Product form Solution. *Neural Computation*, 1 :502–510, 1989.
3. E. Gelenbe, P. Glynn, and K. Sigman. Queues with Negative Arrivals. *Journal of Applied Probability*, 28, 1991.
4. P.G. Harrison and E. Pitel. The M/G/1 Queue with Negative Customers. *Adv. Appli. Prob*, 28 :540–566, 1996.
5. M. Roughan and C. E. M. Pearce. Martingale Methods for Analysing Single Server Queues. *Queueing Systems*, 41 :205–239Adv. Appli. Prob, 2002.