Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 2, 2004, pp. 27 - 31

6

Stabilité forte dans un système de files d'attente $M/G/1$ à serveur non fiable

K. ABBAS[1]

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes, Université de Béjaïa.
karabbas2003@yahoo.fr

Résumé Dans ce travail, on a considéré le problème de perturbation de la distribution de temps de service dans un modèle de files d'attente avec un serveur non-fiable. Après avoir précisé les conditions d'approximation des caractéristiques stationnaires du modèle d'attente M/G/1 avec serveur non-fiable par celles correspondantes du modèle d'attente M/M/1 avec serveur non-fiable, on a obtenu une borne de perturbation relative à la distribution stationnaire du modèle étudié, et ce en utilisant la théorie de stabilité forte des chaînes de Markov.

Mots clés : Le modèle d'attente M/G/1 avec serveur non-fiable ; Chaîne de Markov ; Borne de perturbation ; Théorie de la stabilité forte ; Approximation des caractéristiques stationnaires.

Introduction

Lors de l'étude des problèmes classiques de la théorie des files d'attente, on supposait que les serveurs étaient absolument fiables. Cependant, en pratique, on rencontre souvent des cas où les serveurs sont sujet à des pannes aléatoires et, par conséquent, durant un certain intervalle de temps, le service des clients est interrompu. L'étude de tels systèmes est sans aucun doute très importante pour les applications pratiques.

En théorie des files d'attente, nous nous intéressons également à l'étude de l'influence de la non-fiabilité des serveurs sur les caractéristiques du système considéré. Ainsi, les modèles mathématiques des systèmes et réseaux de files d'attente, les plus élaborés sont justement ceux qui tiennent compte de la possibilité pour les serveurs de tomber en panne.

Les systèmes de files d'attente dont les serveurs sont sujet à des pannes et réparations ont été étudiés par plusieurs chercheurs Gaver [3], Avi-Itzhak and Naor [1], ... Une bibliographie sur le sujet peut-être trouvée dans la synthèse de Fiems and al. [2].

Des résultats analytiques n'ont pu être obtenus que pour certains modèles particuliers de systèmes non fiables. Cependant, même dans ces cas, la complexité des formules analytiques ne permet pas de les exploiter dans la pratique. C'est pour cela que, lors de la modélisation d'un système réel, on est souvent amené à remplacer les éléments stochastiques réels mais compliqués gouvernant le système par d'autres éléments plus simples. Le modèle ainsi utilisé représente une ”idéalisation” du système réel, d'où l'apparition du problème de stabilité.

Le problème de stabilité en théorie des files d'attente permet de délimiter le domaine dans lequel le modèle idéal peut être utilisé comme une bonne approximation du système. Un système de files d'attente est dit stable, lorsqu'une petite perturbation dans ses paramètres entraîne une petite perturbation dans ses caractéristiques.

6.1 Stabilité forte du modèle $M/G/1$ non fiable

Considérons un système de files d'attente $M/G/1$ à serveur non fiable, où le serveur est sujet à des pannes aléatoires. Le flux des arrivées est poissonnien de paramètre λ. La distribution H de la durée de service est générale, de fonction de répartition B et de moyenne $1/\mu$. Supposons que la période de la réparation est exponentielle de taux $r > 0$.

Dans ce système, nous considérons les pannes avec perte définitive de client, c'est-à-dire que dès que la panne se produit, le client quitte le système définitivement avec une probabilité $(1-q)$ lorsque le serveur est tombé en panne. Sinon, il est pris en charge par le serveur avec une probabilité $q > 0$.

L'état de ce système à l'instant t, peut être décrit par le processus stochastique suivant :

$$S(t) = \{X(t), e(t), K(t); t \geq 0\},$$

où, $X(t)$: est ”le nombre de clients dans le système à l'instant t”.

$$e(t) = \begin{cases} 0 \text{ si le serveur est en bon état}\,; \\ 1 \text{ si le serveur en panne.} \end{cases}$$

$K(t)$ est une variable aléatoire telle que :

- ▷ Si $e(t) = 0$ et $X(t) = 0$, alors $K(t)$ est la durée de temps qui s'écoule entre l'instant t et l'instant d'occurrence d'une panne tout ayant le système vide.
- ▷ Si $X(t) \neq 0$,
  - Si $e(t) = 0$, $K(t)$ est la durée résiduelle de service.
  - Si $e(t) = 1$, $K(t)$ est la durée résiduelle de réparation.

Pour l'étude de ce processus au cas discret, nous avons utilisé la méthode de la chaîne de Markov induite. A cet effet, nous introduisons les notations suivantes,

- γ_n : sont les instants de ”fin” du n^{ieme} service, ou ”fin” de la $n^{\text{ième}}$ réparation.
- $X_n = X(\gamma_n)$: est ”le nombre de clients dans le système juste après la ”fin” du n^{ieme} service, ou juste après la ”fin” de la n^{ieme} réparation.

Lemme 6.1. La suite $S_n = (X_n, e_n, K_n)$ forme une chaîne de Markov, d'opérateur de transition $P = (P_{ij})_{i,j\geq 0}$ défini par,

$$P_{ij} = \begin{cases} q\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^j}{j!}dB(x) + \frac{r(1-q)}{\lambda+r}(\frac{\lambda}{\lambda+r})^j & \text{si } i=0; \\ q\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^{j-i+1}}{(j-i+1)!}dB(x) + \frac{r(1-q)}{\lambda+r}(\frac{\lambda}{\lambda+r})^{j-i+1} & \text{si } 0 < i \leq j+1; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Considérons en même temps, un système de files d'attente $M/M/1$ où le serveur est sujet à des pannes aléatoires, de même distribution des inter-arrivées, que le système $M/G/1$ à serveur non fiable, dont E est la distribution des durées du service, qui est exponentielle de paramètre μ.

Concernant ce système, la description de son état à l'instant t, se fait par le processus bidimensionnel markovien suivant : $\overline{S}(t) = \{\overline{X}(t), \overline{e}(t);\ t \geq 0\}$,
où, $\overline{X}(t)$: est "le nombre de clients dans le système à l'instant t".

$$\overline{e}(t) = \begin{cases} 0 \text{ si le serveur est en bon état}; \\ 1 \text{ Si le serveur est en panne.} \end{cases}$$

Afin d'étudier ce processus dans le cas discret, nous appliquons la méthode de la chaîne de Markov induite. A cet effet, nous considérons les mêmes instants que précédemment γ_n.

Lemme 6.2. La suite $\overline{S}_n = (\overline{X}_n, \overline{e}_n)$ forme une chaîne de Markov, d'opérateur de transition $\overline{P} = (\overline{P}_{ij})_{i,j\geq 0}$ défini par,

$$\overline{P}_{ij} = \begin{cases} \lambda^j[q\frac{\mu}{(\lambda+\mu)^{j+1}} + (1-q)\frac{r}{(\lambda+r)^{j+1}}] & \text{si } i=0; \\ q\frac{\mu}{\lambda+\mu}(\frac{\lambda}{\lambda+\mu})^{j-i+1} + (1-q)\frac{r}{\lambda+r}(\frac{\lambda}{\lambda+r})^{j-i+1} & \text{si } 0 < i \leq j+1; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La charge du système $M/M/1$ à serveur non fiable est donnée en lemme suivant :

Lemme 6.3. Le régime stationnaire du système $M/M/1$ à serveur non fiable est gouverné par la loi géométrique, alors la charge de ce système est

$$\varrho = \frac{\lambda}{q\mu + (1-q)r}.$$

Théorème 6.1 *Supposons que la charge $\frac{\lambda}{q\mu+(1-q)r}$ du système $M/M/1$ à serveur non fiable soit inférieure à 1. Alors, pour tout β tel que $1 < \beta < \min\{\frac{\mu}{\lambda}, \frac{r}{\lambda}\}$, avec $\lambda < \min\{\mu, r\}$, la chaîne de Markov $\overline{X}_n$, soumise à une perturbation, est fortement υ-stable pour la fonction $\upsilon(k) = \beta^k$.*

6.2 Inégalités de stabilité

6.2.1 Déviation de l'opérateur de transition

Lemme 6.4. Supposons que $\int_0^{+\infty} x|B-E|(dx) < W/\lambda$ où :
$W = W(B,E) = \int_0^{+\infty} |B-E|(dx)$ et qu'il existe $a > 0$ tel que $\int_0^{+\infty} e^{ax}|B-E|(dx) < \infty$.

Alors, il existe $\beta > 1$ tel que :

$$\int_0^{+\infty} e^{\lambda(\beta-1)x}|B-E|(dx) < \beta W.$$

Posons :

$\beta_0 = \sup\{\beta/1 < \beta < \min\{\frac{\mu}{\lambda}, \frac{r}{\lambda}\}$ avec $\lambda < \min\{\mu, r\}$ et $\int_0^{+\infty} e^{\lambda(\beta-1)x}|B-E|(dt) < \beta W\}$.

Théorème 6.2 *Soient P et $\overline{P}$, les opérateurs de transition des chaînes de Markov induites des systèmes $M/M/1$ à serveur non fiable et $M/G/1$ à serveur non fiable. Supposons que les conditions du lemme (6.4) sont vérifiées. Alors :*

$$\|P - \overline{P}\|_v \leq q\beta_0 W,$$

où $W = W(B,E) = \int_0^{+\infty} |B-E|(dx)$
et $\beta_0 = \sup\{\beta/1 < \beta < \min(\frac{\mu}{\lambda}, \frac{r}{\lambda})$, avec $\lambda < \min(\mu, r)$ et $\int_0^{+\infty} e^{\lambda(\beta-1)x}|B-E|(dt) < \beta W\}$.

6.2.2 Estimation de v-stabilité forte

Pour pouvoir estimer l'écart entre les distributions stationnaires des chaînes considérées, estimons d'abord la norme $\|\overline{\pi}\|$.

Lemme 6.5. Soit π (respectivement $\overline{\pi}$) la distribution stationnaire de la chaîne induite du système $M/G/1$ à serveur non fiable (resp. $M/M/1$ à serveur non fiable). Alors, pour tout $1 < \beta < \beta_0$, on a

$$\|\overline{\pi}\|_v \leq c_0,$$

où c_0 est donnée par :

$$c_0 = \frac{2(\beta-1)}{1-\rho}\rho \tag{6.1}$$

Théorème 6.3 *Supposons que dans un système $M/M/1$ à serveur non fiable, la charge $\frac{\lambda}{q\mu+(1-q)r}$ soit inférieure à 1 et que les conditions du lemme énoncé (6.4) soient vérifiées. Alors, pour tout β tel que $1 < \beta < \beta_0$ et $\forall B$ tel que*

$$W \leq \frac{1-\rho}{qc\beta_0}$$

où q est une probabilité non nulle, nous avons :

$$\|\pi - \overline{\pi}\|_v \leq q\beta_0 W c_0 c(1-\rho-cq\beta_0 W)^{-1},$$

où
$c_0 = \frac{2(\beta-1)}{1-\rho}\rho$, $c = 1 + \|\overline{\pi}\|_v$ *et* $\beta_0 = \sup\{\beta/1 < \beta < \min\{\frac{\mu}{\lambda}, \frac{r}{\lambda}\}$, *avec* $\lambda < \min\{\mu, r\}$ *et* $\int_0^{+\infty} e^{\lambda(\beta-1)x}|B-E|(dt) < \beta W\}$.

Références

1. B. Avi-Itzhak and P. Naor. Some Queueing Problems with the service station subject to breakdown. *Oper. Res.*, 11(3) :303–320, 1963.
2. D. Fiems, B. Steyaert, and H. Bruneel. Discrete-time queues with generally distributed service times and renewal-type server interruptions. *Performance Evaluation*, 55 :277–298, 2004.
3. D. P. Gaver. A waiting Line with Interrupted Service, including Priorities. *Roy. Stat. Soc. J*, B25 :73–90, 1962.