Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 2, 2004, pp. 21 - 24

5

Eléments de bases de la théorie des ensembles flous et la théorie des jeux

F. ANNANE[1]

Université Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou, Departement de Maths, Faculté de sciences

Résumé Dans cet exposé, j'ai developpé quelques éléments de bases de deux principales théories, la théorie des ensembles flous et la théorie des jeux.

Mots clés : Théorie des jeux, ensembles flous, formalisation des imprécisions.

5.1 Introduction

La théorie des ensembles flous est apparue en 1965 à Berkeley dans le laboratoire de Lotfi Zadeh. Cette thèorie permet la formalisation des imprécisions dues à une connaissance globale d'un système très complexe et l'expression du comportement d'un système par des mots.

5.2 Ensembles flous

Définitions (ensemble flou) [3]

Un ensemble flou (ou sous-ensemble flou) F dans un ensemble Ω est défini par la donnée d'une application :

$$\mu_F : \Omega \to [0, 1]$$

ou $\forall \omega \in \Omega, \mu_F(\omega)$ s'interprète comme le degré d'appartenance de ω à F.

Le sup $\{\mu_F(\omega)/\omega \in \Omega\}$ est appelé la hauteur de F et on dira que F est normalisée si et seulement si

$\{\mu_F(\omega)/\omega \in \Omega\} = 1.$

On peut représenter F à l'aide d'ensembles classiques grâce à la définition suivante des $\alpha - coupes$ F (ou coupes de niveau α) de l'ensemble flou F.

Définition : Pour tout ensemble flou F sur Ω, on peut définir ses $\alpha - coupes$ (resp. strictes) $F_\alpha = \{\omega \in \Omega/\mu_F(\omega) \geq \alpha\}$, (resp.$F_\alpha = \{\omega \in \Omega/\mu_F(\omega) > \alpha\}$)

Le support de F (S(F)) dans Ω est l'$\alpha-coupe$ stricte de niveau 0 : $S(F) = \{\omega \in \Omega / \mu_F(\omega) > 0\}$ et le noyau de F $(\overset{\circ\circ}{F})$ l'$\alpha-coupe$ de niveau 1 : $\overset{\circ\circ}{F} = \{\omega \in \Omega / \mu_F(\omega) = 1\}$.

$\forall \alpha, \beta \in [0,1]$ $\alpha \leq \beta \Longrightarrow F_\alpha \subseteq F_\beta$ et $\forall \omega \in \Omega, \mu_F(\omega) = \sup \{\alpha \in [0,1] / \omega \in F_\alpha\}$.

Ce qui fournit immédiatement les correspondances floues des opérations ensemblistes usuelles :

Propriété : Soient F et G deux ensembles flous dans Ω définis respectivement par leurs fonctions d'appartenance μ_F et μ_G :

$$
\begin{aligned}
&(\text{inclusion}) : F \subseteq G \longleftrightarrow \forall \omega \in \Omega, \mu_F(\omega) \leq \mu_G(\omega) \\
&(\text{égalité}) : F = G \longleftrightarrow \forall \omega \in \Omega, \mu_F(\omega) = \mu_G(\omega) \\
&(\text{complémentation}) : C_\Omega^F \longleftrightarrow \forall \omega \in \Omega, \mu_{C_\Omega^F}(\omega) = (1 - \mu_F(\omega)) \\
&(\text{union}) : F \cup G \longleftrightarrow \forall \omega \in \Omega, \mu_{F \cup G}(\omega) = \max(\mu_F(\omega), \mu_G(\omega)) \\
&(\text{intersection}) : F \cap G \longleftrightarrow \forall \omega \in \Omega, \mu_{F \cap G}(\omega) = \min(\mu_F(\omega), \mu_G(\omega)).
\end{aligned}
$$

Défnitions générales

Quantité flou : $F = (IR, \mu_F(.))$

· **Intervalle floue** : (généralisé la notion d'intervalle) est la quantité floue convexe $\Leftrightarrow \mu_F(.)$ est quasi-concave.

· **Intervalle fermé** : (est généralisé par des intervalles flous dont est $\mu_F(.)$ est S.C.S $\Leftrightarrow$ les α-coupes sont des
intervalles fermés.

· **Les compacts de** IR : (fermés, bornés) sont généralisés par les quantités flous S.C.S à support compact. (les
α-coupes sont des fermés bornés)

· **Nombre flou** : un intervalle S.C.S à support compact et de valeur modale unique.

· **Exemple** : M est un nombre flou de valeur modale m : M est une représentation possible de "environ m" .

5.3 Eléments de base de la théorie des jeux

5.3.1 Introduction :

La théorie des jeux est une théorie mathématique, qui traite les situations de conflits ; Son propos est l'étude de toute situation ou des individus font des choix en interaction. [1, 2]

Un jeu est la donnée de : $I = \{1, ...n\}$ ensemble des joueurs ; $X = \overset{i \in I}{\Pi} X_i$ ensemble des issues du jeu ; X_i ensemble des stratégies du i-ème joueur ; x_i : une stratégie du i-ème joueur ; $x = (x_1, ...x_i, ..., x_n)$:une issue du jeu ; $f(x) = (f_1(x), ...f_i(x), ..., f_n(x))$: vecteur des fonctions gain des n-joueurs.

Donc : un jeu est représenté (forme normale) par le modèle :

$$< I, X, f(x) >$$

Classification des jeux : Avant de passer à la classification des jeux, certaines définitions sont nécessaires :

Coalition : est un sous-ensemble de joueurs qui concluent un certain accord.

Les paiements latéraux : sont les gains que peuvent recevoir des joueurs (des autres) autre que ceux représentés par leurs fonctions gain.

Un accord est dit contraignant : si son application est garantie (ex : par une justice ou un état).

On retrouve plusieurs classification des jeux :

1- Selon le nombre de coups : Jeu à un coup (sous forme normale) ; jeu à plusieurs coups (sous forme extensive).

2- Selon les relations entre les joueurs : Coopératif ; non coopératif .Cette classe de jeu est répartie en deux cas : Jeux avec paiement latéraux : se traite avec l'aide des fonctions caractéristiques, jeux sans paiement latéraux. Dans notre exposé, on considère que les jeux coopératifs sans paiement latéraux.

3- Selon l'information que possèdent les joueurs sur les données du jeu : Complète ou incomplète.

5.3.2 Concepts de solution des jeux

Jeux non coopératifs

Nous décrivons le comportement non coopératif par :

Si les adversaires $(I - i)$ du i^{ième} joueur mettent en oeuvre la stratégie x_{I-i}, le i^{ème} joueur choisira

$x_i \in X_i$, qui maximise la fonction : $t_i \longrightarrow \ f_i(x//t_i)$.

Règles du jeu non coopératif

1. Les joueurs sont rationnels ; 2. Chacun des joueurs connaît l'ensembles des stratégies et la fonction gain des

autres joueurs, en plus des siens propres ; 3. Les paiement latéraux sont interdits ; 4. Pas d'accord contraignant entre les joueurs.

Equilibre de Nash

Définition : Une issue $\overline{x} = (\overline{x_1}, ..., \overline{x_n}) \in X$ de (J_1) est un équilibre de Nash, si elle vérifie :

$\forall i \in I$, $\forall x_i \in X_i$, $f_i(\overline{x}//x_i) \leq f_i(\overline{x})$.

Jeux coopératifs

Règles d'un jeu coopératif

Les conditions (1)- 3) sont les mêmes que celles du cas non coopératifs, la $4^{ème}$ condition sera : les joueurs sont autorisés à conclure des accords contraignants (ce qui exprime la coopération des joueurs).

On va citer une solution :

Le Z-équilibre : x° est dit Z-équilibre si :

1- x° est pareto optimal $\forall x \in X$, le système d'inégalité $f_i(x^\circ) \leq f_i(x), \forall i = \overline{1, m}$, avec au moins l'une qui est stricte est impossible.

2- $\forall i \in I, \forall x \in X, \exists x_{I-i} \in X_{I-i}$ telle que $f_i(x_i, x_{I-i}) \leq \ f_i(x^\circ)$.

Références

1. Nash J.F. (1951) *Noncooperative Games*-Annls. Math.,54, pp, 286-295.
2. Von Neumann, J. and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton (Princeton University Press), 1944, 1947.
3. Zadeh, L.A. "*Fuzzy sets*", Information and control, 8, 338-353, 1965.