Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 2, 2004, pp. 13 - 19

4

Sur les problèmes multi-objectifs avec indétermination VI-type I

H. SLIMANI[1]

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes
email :haslimani@yahoo.fr

Résumé Les fonctions de type I et de type II ont été introduites par Hanson et Mond [4] pour l'étude des problèmes mono-objectifs avec contraintes. Par la suite, Kaul et al. [6], Aghezzaf et Hachimi [1] ont introduit la notion de fonctions type I pour un problème multi-objectifs avec contraintes. Hanson et al. [5] ont donné une autre définition de problème multi-objectifs V-type I. Dans cet article, nous avons introduit la notion de problème VI-type I pour un problème multi-objectifs avec indétermination soumis à des contraintes. Des propriétés et des conditions suffisantes d'existence d'un point-selle de Slater et de Geoffrion ont été obtenues pour un problème VI-type I.

Mots-clés : Point-selle de Slater, Point-selle de Geoffrion, Indétermination, Problèmes VI-type I, Pseudo-VI-type I, Quasi-VI-type I.

4.1 Introduction

L'optimisation multi-objectifs, appelée aussi programmation vectorielle ou encore programmation multi-objectifs, est un domaine de l'optimisation qui s'impose de plus en plus comme un axe important de la recherche opérationnelle. Ceci s'explique par ses applications comme méthodes d'aide à la décision dans différents domaines, où la prise de décision doit se faire non plus par rapport à un critère unique, mais par rapport à plusieurs critères d'évaluation ou de performance des conséquences de chaque décision ou action.

Souvent le phénomène étudié est très influencé par la présence de paramètres ou par son environnement qui échappent au contrôle du preneur de décision. L'évolution de ces paramètres est très souvent mal définie et cernée (comme par exemple les conditions climatiques, le cours de la devise, le prix de la matière première, les importations,...) et la seule information disponible sont les limites du domaine de variation. Dans ce type de problèmes, il devient difficile de décrire ou de prédire le comportement de ces paramètres, pour mieux asseoir sa prise de décision. C'est pour répondre à ce type de situation qu'est née une autre branche de la théorie de l'optimisation multi-objectifs, analysant et proposant des méthodes de prise de décision dans un problème multi-objectifs en présence de paramètres indéterminés. Les premiers travaux remontent aux années 1980, proposant les définitions des concepts d'optimalité pour des problèmes multi-objectifs en présence de paramètres indéterminés.

Dans cet article, en s'inspirant de la notion de fonctions type I établie pour les problèmes mono-objectifs [4, 7] et la notion de fonctions type I (ou de problèmes V-type I) établie pour les problèmes multi-objectifs [1, 5, 6], nous avons introduit une nouvelle notion de problèmes appelée VI-type I pour les problèmes multi-objectifs avec contraintes en tenant compte de la présence de paramètres indéterminés. Des propriétés et des conditions suffisantes d'existence de points-selle de Slater et de points-selle de Geoffrion ont été obtenues pour ce type de problèmes.

4.2 Préliminaires et définitions

Les notations suivantes d'équations et d'inéquations seront utilisées. Si $x,\, y \in \mathbb{R}^n$, on notera :

$x \leqq y \Leftrightarrow x_i \leqq y_i$, i=1,...,n ;

$x \leq y \Leftrightarrow x \leqq y$ et $x \neq y$.

On notera aussi par $\mathbb{R}^q_{\geq}$ (resp. $\mathbb{R}^q_{\geqq}$) l'ensemble des vecteurs $y \in \mathbb{R}^q$ avec $y \geq 0_{(q)}$ (resp. $y \geqq 0_{(q)}$).

Définition 4.1 *[2, 3] Un ensemble non vide $X \subseteq \mathbb{R}^n$ est invexe en $x_0 \in X$ par rapport à η, s'il existe une fonction vectorielle $\eta : X \times X \to \mathbb{R}^n$ telle que $\forall\ \lambda \in [0,1]$ et $\forall\ x \in X$ on a,*

$$x_0 + \lambda\eta(x, x_0) \in X. \tag{4.1}$$

On dit que X est un ensemble invexe par rapport à η, si X est invexe en chaque point $x_0 \in X$ par rapport à la même fonction vectorielle η.

Considérons le problème multi-objectifs avec indétermination soumis aux contraintes :

$$\langle X, Y, \{f_i(x,y)\}_{i\in\mathcal{N}}\rangle, \tag{4.2}$$

où $\mathcal{N} = \{1, ..., N\}$ avec $N \geqq 2$, $D_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ et $D_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ sont deux sous-ensembles ouverts ;

$f : D_1 \times D_2 \to \mathbb{R}^N$ est une fonction différentiable sur $D_1 \times D_2$;

$g : D_1 \to \mathbb{R}^k$ est une fonction différentiable sur D_1 ;

$h : D_2 \to \mathbb{R}^p$ est une fonction différentiable sur D_2 ;

$X = \{x \in D_1 / g_j(x) \geqq 0,\ j = \overline{1,k}\}$ est l'ensemble des décisions ;

$Y = \{y \in D_2 / h_i(y) \leqq 0,\ i = \overline{1,p}\}$ est l'ensemble des indéterminations.

En s'inspirant de [1, 4, 5, 6, 7], nous définissons le problème VI-type I.

Définition 4.2 *On dira que le problème multi-objectifs (3.4) est VI-type I en* $(x_0, y_0) \in X \times Y$ *par rapport à* η *et* ϕ*, s'il existe deux fonctions vectorielles* $\eta : X \times X \to \mathbb{R}^n$ *et* $\phi : Y \times Y \to \mathbb{R}^m$ *telles que :*

$$f(x, y_0) - f(x_0, y_0) \leqq [\nabla_x f(x_0, y_0)]\eta(x, x_0), \ \forall\ x \in X, \tag{4.3}$$

$$f(x_0, y) - f(x_0, y_0) \geqq [\nabla_y f(x_0, y_0)]\phi(y, y_0), \ \forall\ y \in Y, \tag{4.4}$$

$$-g(x_0) \leqq [\nabla g(x_0)]\eta(x, x_0), \ \forall\ x \in X, \tag{4.5}$$

$$-h(y_0) \geqq [\nabla h(y_0)]\phi(y, y_0), \ \forall\ y \in Y. \tag{4.6}$$

On dira que le problème (3.4) est VI-type I sur $X \times Y$*, s'il est VI-type I en tout point* $(x_0, y_0) \in X \times Y$*. Si on a des inégalités strictes dans (3.5) à (4.6), on dira que le problème (3.4) est strictement VI-type I en* $(x_0, y_0) \in X \times Y$*.*

Remarque 4.1 *La lettre I dans le terme VI-type I, ajoutée à la notion de problème V-type I définie par Hanson et al. [5], servira à signifier la prise en compte de la présence d'un paramètre indéterminé dans le problème multi-objectifs.*

Nous donnons un exemple de problème VI-type I en un point (x_0, y_0).

Exemple 4.1. Si dans le problème (3.4) on a : $f(x, y) = (\frac{1}{x}, \frac{-1}{y})^t$, $g(x) = x - 1$ et $h(y) = 1 - y$ avec $x \in]0, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$, alors le problème est VI-type I en $(x_0, y_0) = (1, 1)$ par rapport à $\eta(x, x_0) = 1 - \frac{1}{x}$ et $\phi(y, y_0) = 1 - \frac{1}{y}$.

4.3 Conditions d'existence de problèmes VI-type I

Dans cette section, en s'inspirant de [7], nous donnons des conditions suffisantes pour qu'un problème multi-objectifs avec contraintes et indétermination soit VI-type I.

Théorème 4.1 *Supposons que :*

- $f(x, y)$ *est différentiable en* $(x_0, y_0) \in X \times Y$*,*
- $g(x)$ *est différentiable en* x_0*,*
- $h(y)$ *est différentiable en* y_0*.*

S'il existe deux fonctions vectorielles $\eta : X \times X \to \mathbb{R}^n$ *et* $\phi : Y \times Y \to \mathbb{R}^m$ *telles que* X *est invexe en* x_0 *par rapport à* η*,* Y *est invexe en* y_0 *par rapport à* ϕ *et* $\forall\ x \in X$*,* $\forall\ y \in Y$ *on a :*

$$\begin{cases} f(x_0 + \lambda\eta(x, x_0), y_0) \geqq \lambda f(x, y_0) + (1 - \lambda) f(x_0, y_0), & \forall\ \lambda \in [0, 1], \\ g(x_0 + \beta\eta(x, x_0)) \geqq (1 - \beta) g(x_0), & \forall\ \beta \in [0, 1], \end{cases} \tag{4.7}$$

et

$$\begin{cases} f(x_0, y_0 + \alpha\phi(y, y_0)) \leqq \alpha f(x_0, y) + (1-\alpha) f(x_0, y_0), & \forall\ \alpha \in [0,1], \\ h(y_0 + \gamma\phi(y, y_0)) \leqq (1-\gamma) h(y_0), & \forall\ \gamma \in [0,1], \end{cases} \tag{4.8}$$

alors le problème (3.4) est VI-type I en (x_0, y_0) par rapport à η et ϕ.

Théorème 4.2 *Supposons que $f(x, y)$ est différentiable et concave-convexe sur $X \times Y$, $g(x)$ est différentiable et concave sur X et $h(y)$ est différentiable et convexe sur Y. Alors, le problème (3.4) est VI-type I sur $X \times Y$.*

Théorème 4.3 *Si $f(x, y)$ est différentiable et strictement concave-convexe sur $X \times Y$, $g(x)$ est différentiable et strictement concave sur X, $h(y)$ est différentiable et strictement convexe sur Y. Alors, le problème (3.4) est strictement VI-type I sur $X \times Y$.*

Théorème 4.4 *Si le problème (3.4) est strictement VI-type I en $(x_0, y_0) \in X \times Y$ par rapport à η et ϕ, alors il est VI-type I en (x_0, y_0) par rapport aux mêmes fonctions vectorielles η et ϕ.*

4.4 Problèmes pseudo-VI-type I et quasi-VI-type I

Dans cette section, nous donnons des extensions de la notion de problèmes VI-type I aux notions de problèmes pseudo-VI-type I et quasi-VI-type I.

Définition 4.3 *On dira que le problème (3.4) est pseudo-VI-type I en $(x_0, y_0) \in X \times Y$ par rapport à η et ϕ, s'il existe deux fonctions vectorielles $\eta : X \times X \to \mathbb{R}^n$ et $\phi : Y \times Y \to \mathbb{R}^m$ telles que :*

$$[\nabla_x f(x_0, y_0)]\, \eta(x, x_0) \leqq 0 \Rightarrow f(x, y_0) - f(x_0, y_0) \leqq 0,\ \forall\ x \in X, \tag{4.9}$$

$$[\nabla_y f(x_0, y_0)]\, \phi(y, y_0) \geqq 0 \Rightarrow f(x_0, y) - f(x_0, y_0) \geqq 0,\ \forall\ y \in Y, \tag{4.10}$$

$$[\nabla g(x_0)]\, \eta(x, x_0) \leqq 0 \Rightarrow -g(x_0) \leqq 0,\ \forall\ x \in X, \tag{4.11}$$

$$[\nabla h(y_0)]\, \phi(y, y_0) \geqq 0 \Rightarrow -h(y_0) \geqq 0,\ \forall\ y \in Y. \tag{4.12}$$

Théorème 4.5 *Si le problème (3.4) est VI-type I en $(x_0, y_0) \in X \times Y$ par rapport à η et ϕ, alors il est pseudo-VI-type I en (x_0, y_0) par rapport aux mêmes fonctions vectorielles η et ϕ.*

Remarque 4.2 *Les problèmes pseudo-VI-type I ne sont pas nécessairement VI-type I, comme on peut le constater dans l'exemple suivant.*

Exemple 4.2. Si dans le problème (3.4) on a : $f : [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (\cos^2 x, -\cos^2 y)^t$, $g : [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \cos x$ et $h : [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$

définie par $h(y) = -\cos y$, alors le problème est pseudo-VI-type I en $(x_0, y_0) = (\frac{-\pi}{4}, \frac{-\pi}{4})$ par rapport à $\eta(x, x_0) = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x$ et $\phi(y, y_0) = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos y$, mais il n'est pas VI-type I en (x_0, y_0) par rapport aux mêmes fonctions η et ϕ.

Nous donnons maintenant la définition d'un problème quasi-VI-type I.

Définition 4.4 *On dira que le problème (3.4) est quasi-VI-type I en $(x_0, y_0) \in X \times Y$ par rapport à η et ϕ, s'il existe deux fonctions vectorielles $\eta : X \times X \to \mathbb{R}^n$ et $\phi : Y \times Y \to \mathbb{R}^m$ telles que :*

$$f(x, y_0) - f(x_0, y_0) \geqq 0 \Rightarrow [\nabla_x f(x_0, y_0)]\eta(x, x_0) \geqq 0, \ \forall\ x \in X, \tag{4.13}$$

$$f(x_0, y) - f(x_0, y_0) \leqq 0 \Rightarrow [\nabla_y f(x_0, y_0)]\phi(y, y_0) \leqq 0, \ \forall\ y \in Y, \tag{4.14}$$

$$-g(x_0) \geqq 0 \Rightarrow [\nabla g(x_0)]\eta(x, x_0) \geqq 0, \ \forall\ x \in X, \tag{4.15}$$

$$-h(y_0) \leqq 0 \Rightarrow [\nabla h(y_0)]\phi(y, y_0) \leqq 0, \ \forall\ y \in Y. \tag{4.16}$$

Théorème 4.6 *Si le problème (3.4) est VI-type I en $(x_0, y_0) \in X \times Y$ par rapport à η et ϕ, alors il est quasi-VI-type I en (x_0, y_0) par rapport aux mêmes fonctions vectorielles η et ϕ.*

Remarque 4.3 *Les problèmes quasi-VI-type I ne sont pas nécessairement VI-type I, comme on peut le voir à partir de l'exemple suivant.*

Exemple 4.3. Si dans le problème (3.4) on a : $f : [0, \pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (-\sin^3 x, \sin^3 y)^t$, $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \cos x$ et $h : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ définie par $h(y) = -\cos y$, alors le problème est quasi-VI-type I en $(x_0, y_0) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ par rapport à $\eta(x, x_0) \equiv -1$ et $\phi(y, y_0) \equiv -1$, mais il n'est pas VI-type I en (x_0, y_0) par rapport aux mêmes fonctions η et ϕ.

4.5 Conditions d'optimalité pour les problèmes VI-type I

Dans cette section, nous donnons des conditions suffisantes d'existence de points-selle de Slater et de points-selle de Geoffrion pour les problèmes VI-type I, ensuite un exemple de problème VI-type I où $f(x, y)$ n'est pas concave-convexe et qui admet un point-selle de Geoffrion et donc de Slater.

Théorème 4.7 *Soit $(x_0, y_0) \in X \times Y$ et supposons que le problème (3.4) est VI-type I en (x_0, y_0) par rapport à η et ϕ. S'il existe $(\mu_0, \mu) \in \mathbb{R}^N_{\geq} \times \mathbb{R}^k_{\geqq}$ et $(\alpha_0, \alpha) \in \mathbb{R}^N_{\geq} \times \mathbb{R}^p_{\geqq}$ tels que (x_0, μ_0, μ) et (y_0, α_0, α) vérifient les conditions suivantes :*

$$\mu_0^t \nabla_x f(x_0, y_0) + \mu^t \nabla g(x_0) = 0, \tag{4.17}$$

$$\alpha_0^t \nabla_y f(x_0, y_0) + \alpha^t \nabla h(y_0) = 0, \tag{4.18}$$

$$\mu^t g(x_0) = 0, \tag{4.19}$$

$$\alpha^t h(y_0) = 0, \tag{4.20}$$

alors (x_0, y_0) *est un point-selle de Slater dans le problème (3.4).*
S'il existe $(\mu_0, \mu) \in \mathbb{R}^N_> \times \mathbb{R}^k_{\geqq}$ *et* $(\alpha_0, \alpha) \in \mathbb{R}^N_> \times \mathbb{R}^p_{\geqq}$ *tels que les relations (4.17)-(4.20) sont vérifiées, alors* (x_0, y_0) *sera un point-selle de Geoffrion dans le problème (3.4).*

Nous donnons maintenant un exemple de problème VI-type I, tel que $f(x, y)$ n'est pas concave-convexe et qui admet un point-selle de Geoffrion et donc de Slater.

Exemple 4.4. Le problème défini par les fonctions $f(x, y) = (\frac{1}{x}, \frac{-1}{y})^t$, $g(x) = x - 1$ et $h(y) = -y + 1$ avec $x \in]0, +\infty[$ et $y \in]0, +\infty[$ est VI-type I en $(x_0, y_0) = (1, 1)$ par rapport à $\eta(x, x_0) = 1 - \frac{1}{x}$ et $\phi(y, y_0) = 1 - \frac{1}{y}$ (voir exemple 4.1). $f(x, y)$ n'est pas concave-convexe en (x_0, y_0). En posons $\mu_0 = (\frac{1}{2}, 2)^t \in \mathbb{R}^2$, $\mu = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$, $\alpha_0 = (1, \frac{1}{3})^t \in \mathbb{R}^2$, $\alpha = \frac{1}{3} \in \mathbb{R}$,
(x_0, μ_0, μ) et (y_0, α_0, α) vérifient les conditions du théorème 4.7.
Donc d'après le théorème 4.7, (x_0, y_0) est un point-selle de Geoffrion dans le problème (3.4).

4.6 Conclusion

Nous avons donné une autre forme de conditions suffisantes d'existence d'un point-selle de Slater et de Geoffrion dans un problème multi-objectifs avec indétermination et contraintes. Pour cela, en s'inspirant de [1, 4, 5, 6, 7], nous avons introduit la notion de problème multi-objectifs avec indétermination VI-type I avec ses différentes extensions. Nous avons donné des conditions pour qu'un problème multi-objectifs avec indétermination et contraintes soit VI-type I. Par la suite, nous avons obtenu des conditions suffisantes d'existence d'un point-selle de Slater et de Geoffrion pour un problème multi-objectifs VI-type I.

Références

1. B. Aghezzaf and M. Hachimi. Generalized Invexity and Duality in Multiobjective Programming Problems. *J. of Global Optim.* ***18****, 91-101*, (2000).
2. T. Antczak. (p,r)-Invex Sets and Functions. *preprint, Faculty of Mathematics University of Lodz, Poland*, (1998).
3. T. Antczak. Mean Value in Invexity Analysis. *preprint, Faculty of Mathematics University of Lodz, Poland*, (2001).

4. M. A. Hanson and B. Mond. Necessary and Sufficient Conditions in Contrained Optimisation. *Mathematical programming **37**, 51-58*, (1984).

5. M. A. Hanson, R. Pini, and C. Singh. Multiobjective Programming Under Generalized Type I Invexity. *J. Math. Anal. Appl. **261**, 562-577*, (2001).

6. R.N. Kaul, S.K. Suneja, and M.K. Srivastava. Optimality Criteria and Duality in Multiple-Objective Optimization Involving Generalized Invexity. *J. Optim. Theory Appl. **80**, No 3*, (1994).

7. N. G. Rueda and M. A. Hanson. Optimality Criteria in Mathematical Programming Involving Generalized Invexity. *Academic Press, Inc.*, 1988.