Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 2, 2004, pp. 7 - 11

3

Existence de l'équilibre social de Berge dans un jeu avec contraintes

H. GHAROUT[1]

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes,
email :gharouthacene@yahoo.fr

Résumé Dans ce travail, nous avons défini et étudié un équilibre social de Berge pour un jeu avec contraintes dit méta-jeu. En utilisant le théorème de Ky Fan - Kakutani (respectivement le théorème de Tian-Zhou), des conditions suffisantes d'existence de l'équilibre social de Berge ont été obtenues sous l'hypothèse de concavité (respectivement sous l'hypothèse de la 0-diagonale quasi-concavité) des fonctions de gain.

Mots clés : Méta-jeux, équilibre social de Berge, concavité, 0-diagonale concavité, 0-diagonale quasi-concavité.

Introduction

Les conditions d'existence d'un équilibre pour les inégalités quasi-variationnelles font toujours l'objet d'étude de nombreux auteurs. Cet intérêt s'explique par les nombreuses applications en économie, en théorie du contrôle et, plus particulièrement, en théorie des jeux. Différentes généralisations des conditions d'existence d'une solution pour ces inégalités ont été proposées : Georgiev et Tanaka [5], Ding et Tan [2], Yu et Yuan [10], Shih et Tan [9], Zhou et Chen [11], Tian et Zhou [6].

Dans ce papier, on utilisera les résultats de [6] et [1] pour proposer des conditions d'existence d'un équilibre social de Berge dans un jeu avec contraintes. Cette notion d'équilibre a été introduite par Zhukovskii [12] et étudiée par différents auteurs Radjef [8], Larbani [7] et Gaidov [4].

3.1 Position du problème

Dans cette section nous allons définir l'équilibre social de Berge, d'un méta-jeu représenté par le modèle :

$$\langle X_i, S_i, f_i \rangle_{i \in I} \tag{3.1}$$

où $I = \{1, 2, \cdots, N\}$ est l'ensemble des joueurs qu'on considère fini, f_i la fonction de gain du i^{eme} joueur donnée par :

$$f_i : X = \Pi_{i\in I} X_i \longrightarrow \mathbb{R}$$

et $S_i(.)$ une fonction multivoque représentant les contraintes pour le joueur i, définie par

$$S_i : X_{I-i} \longrightarrow 2^{X_i},$$

et $S(x) = \Pi_{i\in I} S_i(x_{I-i}),\ \forall\, x \in\ X.$
Soit $x \in\ X$.
Posons

$$\overline{\overline{S}}_i(x_i) = \{y_{I-i} \in\ \Pi_{j\in I-i} S_j(x_{I-j}) / f_i(x_i, y_{I-i}) = \sup_{t_{I-i}\in\ \Pi_{j\in I-i} S_j(x_{I-j})} f_i(x_i, t_{I-i})\} \tag{3.2}$$

et $\widehat{S}(x) = \Pi_{i\in I} \widetilde{S}_{I-i}(x_i)$,
avec $\widetilde{S}_{I-i}(x_i) = \Pi_{j\in I-i} S_j(x_{I-j})$,
i.e. $\widehat{S}(x) = \{\widehat{y} = (y_{I-1}, y_{I-2}, \cdots, y_{I-N}) / \forall\, i \in\ I, y_{I-i} \in\ \widetilde{S}_{I-i}(x_i)\}$.
Notons $\widehat{X} = \Pi_{i\in I} X_{I-i}$, $\widehat{y} = (y_{I-1}, y_{I-2}, \cdots, y_{I-n}) \in\ \widehat{X}$,
avec $y_{I-i} \in\ X_{I-i}, \forall\, i \in\ I$ et $\forall\, i \neq j$, les composantes de y_{I-i} et y_{I-j} ne dérivent pas nécessairement d'un même vecteur $y \in\ X$.

Définition 3.1 *x^* est dit équilibre social de Berge du méta-jeu (3.1), si*

$$\forall\, i \in\ I,\ x^*_{I-i} \in\ \overline{\overline{S}}_i(x^*_i). \tag{3.3}$$

Remarque 3.1 *Si $\forall\, i \in\ I,\ S_i(x_{I-i}) \equiv X_i$ pour tout x dans $X = \Pi_{i\in I} X_i$ alors le méta-jeu (3.1) devient un jeu conventionnel et l'équilibre social de Berge coincide avec un équilibre de Berge.*

Proposition 1 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) x^* *équilibre social de Berge du méta-jeu (3.1) ;*

(b) $\forall\, i = \overline{1, N},\ x^*_{I-i} \in\ \Pi_{j\in I-i} S_j(x^*_{I-j})$ *et* $\forall\, t_{I-i} \in\ \Pi_{j\in I-i} S_j(x^*_{I-j})$ *on a*

$$f_i(x^*_i, x^*_{I-i}) \geq\ f_i(x^*_i, t_{I-i});$$

(c) $x^* \in\ S(x^*) = \Pi_{i\in I} S_i(x^*_{I-i})$ *et* $\forall\, \widehat{y} \in\ \widehat{S}(x^*)$

$$\widehat{\varphi}(x^*, \widehat{y}) \leq\ 0,$$

où

$$\widehat{\varphi} : X \times \widehat{X} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, \widehat{y})\ \mapsto\ \widehat{\varphi}(x, \widehat{y}) = \sum_{i=1}^{N} [f_i(x_i, y_{I-i}) - f_i(x_i, x_{I-i})].$$

3.2 Notion de fonction 0-diagonale concave

Définition 3.2 *[6] Soit X un sous-ensemble convexe dans un espace vectoriel topologique et φ une fonction définie de $X \times X$ dans $\mathbb{R}$.*
La fonction $(x, y) \mapsto \varphi(x, y)$ est dite 0-diagonale concave par rapport à y, si pour toute famille finie $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \subset X$ et $y_\lambda \in co(\{y_1, y_2, \ldots, y_n\})$, i.e. $y_\lambda = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j$,
$\forall \lambda_j \geq 0$ avec $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$, on a

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \varphi(y_\lambda, y_j) \leq 0. \tag{3.4}$$

Définition 3.3 *[6] Soit X un sous-ensemble convexe dans un espace vectoriel topologique et φ une fonction définie de $X \times X$ dans $\mathbb{R}$.*
La fonction $(x, y) \mapsto \varphi(x, y)$ est dite 0-diagonale quasi-concave par rapport à y, si pour toute famille finie $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \subset X$ et $y_\lambda \in co(\{y_1, y_2, \ldots, y_n\})$ on a

$$\min_j \varphi(y_\lambda, y_j) \leq 0. \tag{3.5}$$

3.3 Existence de L'équilibre social de Berge dans un méta-jeu

Dans cette section, nous allons formuler des conditions suffisantes d'existence d'un équilibre social de Berge d'un méta-jeu en utilisant la notion de concavité puis la 0-diagonale quasi-concavité.
La proposition suivante nous donnera une condition nécessaire et suffisante pour qu'une issue du jeu soit un équilibre social de Berge d'un méta-jeu.

Proposition 2 *Supposons que :*
$\forall\, x \in X$, $\exists\, y \in S(x), \forall\, i \in I$

$$f_i(x_i, t_{I-i}) \leq f_i(x_i, y_{I-i}),\ \forall\, t_{I-i} \in \widetilde{S}_{I-i}(x_i).$$

Alors, $\overline{x} \in X$ est un équilibre social de Berge du méta-jeu (3.1) si et ssi

$$\overline{x} \in S(\overline{x}) \text{ et } \sup_{y \in S(\overline{x})} \varphi(\overline{x}, y) = 0,$$

où $\varphi(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{N} [f_i(x_i, y_{I-i}) - f_i(x)], \forall\, x \in X, \forall\, y \in X$.

3.3.1 Sous la concavité

En utilisant le théorème de Ky Fan-Kakutani [1], nous avons abouti au théorème suivant :

Théorème 3.1 *Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. $\forall\ x \in\ X,\ \exists\ y \in\ S(x),\ \forall\ i \in\ I,$
$$f_i(x_i, t_{I-i}) \leq\ f_i(x_i, y_{I-i}),\ \forall\ t_{I-i} \in\ \Pi_{j\in I-j} S_j(x_{I-j});$$
2. *les ensembles* $X_i, i = \overline{1, N}$ *sont non-vides, convexes et compacts ;*
3. *les fonctions* $x \longrightarrow f_i(x), i = \overline{1, N}$ *sont continues sur* X *;*
4. *les fonctions* $y_{I-i} \longrightarrow f_i(x_i, y_{I-i})$ *concaves,* $\forall\ x_i \in\ X_i$ *pour tout* $i \in\ I$ *;*
5. $\forall\ i \in\ I, S_i : X_{I-i} \longrightarrow 2^{X_i}$ *est continue et à valeurs non-vides,convexes et compactes.*

Alors, il existe au moins un équilibre social de Berge du méta-jeu (3.1).

Démonstration. La démonstration du théorème découle directement de la proposition 1 et du théorème de Ky Fan-Kakutani [1].

3.3.2 Sous la 0-diagonale quasi-concavité

En utilisant le théorème de Tian-Zhou [6],nous avons abouti au théorème suivant :

Théorème 3.2 *Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. $X_i, i = \overline{1, N}$ *sont des ensembles non-vides, convexes et compacts d'un espace vectoriel topologique de Hausdorff ;*
2. $\forall\ x \in\ X, \exists\ y \in\ S(x), \forall\ i \in\ I,$
$$f_i(x_i, t_{I-i}) \leq\ f_i(x_i, y_{I-i}),\ \forall\ t_{I-i} \in\ \widetilde{S}_{I-i}(x_i);$$
3. $\forall\ i \in\ I$*, la correspondance* $S_i : X_{I-i} \longrightarrow 2^{X_i}$ *est semi-continue supérieurement et a valeurs non-vides, convexes et compactes et admet des sections supérieurement ouvertes ;*
4. *les fonctions* $x \longrightarrow f_i(x), i = \overline{1, N}$ *sont continues sur* X *;*
5. $\forall\ \{y^1, y^2, \cdots, y^m\} \subset X,\ \exists\ j \in\ \{1, 2, \cdots, m\}$ *tel que*
$$f_i(y_i^\lambda, y_{I-i}^j) \leq\ f_i(y^\lambda),\ \forall\ i \in\ \{1, 2, \cdots, N\}$$
avec $y^\lambda \in\ co\{y^1, y^2, \cdots, y^m\}$.

Alors, il existe au moins un équilibre social de Berge du méta-jeu (3.1).

Démonstration (Preuve). La démonstration du théorème découle directement de la proposition 1 et du théorème de Tian-Zhou.

Conclusion

Les théorèmes 3.1 et 3.2 nous donne les conditions d'existence d'un équilibre social de Berge dans un jeu avec contraintes avec et sans la concavité des fonctions de gains des joueurs.

Références

1. J. P. Aubin. *Optima and Equilibria (An Introduction to Nonlinear Analysis)*, volume 430. 1998.
2. X. P. Ding and K. K. Tan. A minimax inequality with application to existence of equilibrium points and fixed theorms. *Math.Anal.Appl.*, pages 233–274, 1992.
3. Ky Fan. *Minimax inequality and application.* Acadimic Press, New York, o.shisha edition edition, 1972.
4. S. D. Gaidov. Berge equilibrium in stochastic differential games. *Math Balcanica, N.S*, 1987.
5. P. G. Georgiev and T. Tanaka. Vector-valued set-valued variants of Ky Fan's inequality. *J.Nonlinear and convex analysis*, 1(3) :245–254, 2000.
6. G.Tian and J.Zhou. Quasi-variational inequalities without the concavity assumption. *Mathematical analysis*, pages 289–299, 1993.
7. M. Larbani. *Sur l'existence de l'équilibre de Berge pour les jeux à n-personnes.* Francoro II, Sousse, Tunisie, avril 1998.
8. M. S. Radjef. Sur l'existence d'un équilibre de Berge pour un jeu différentiel à n-personnes. *Cahiers Mathématiques, Fasc1*, 1988.
9. M. H. Shih and K. Tan. Generalized quasi-variational inequalities in locally convex topological vector spaces. *Math.Anal.Appl.*, (108) :333–343, 1985.
10. J. Yu and X. Z. Yuan. The study of Pareto equilibria for multiobjectives games by fixed point and Ky Fan minimax inequality methods. *Research Report1/95, Departement of mathematics, guizhou Institute of technology, China*, 1995.
11. J. X. Zhou and G. Chen. Diagonal convexity conditions for problems in convex analysis and quasi-variational inequalities. *J.Math. Anal. Appl.*, pages 213–225, 1988.
12. V. I . Zhukovskii. Introduction aux jeux différentiels avec incertitude. *Institut international de recherche en problème de gestion, Moscou*, 1997.
13. V.I. Zhukovskii. Jeux differentiels quadratiques. *Naoukova Doumaka, Kiev*, 1994.