Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 19, 2019, pp. 25 - 28

10

La programmation bi-niveaux dans le domaine de transport

K. BOUIBED

Unité de recherche LaMOS
Université de Bejaia
email : karima.bouibed@gmail.com

Résumé Depuis sa première formulation par Stackelberg [4] dans le cadre des marchés économiques asymétriques, la programmation bi-niveaux a été appliquée avec succès à de nombreux problèmes réels. Pendant les vingt dernières années, les problèmes de transport ont été bénéficies de la formulation des progrès de la programmation bi-niveaux. Dewez et al. [2] ont considéré le problème de maximisation des recettes de péage perçu sur un réseau de transport. Le leader détermine les droits, tandis que les utilisateurs répondent en sélectionnant les chemins les moins chers pour leur destination. Le problème de transport de matières dangereuses a été aussi modélisé sous forme d'un problème de programmation bi-niveaux, on peut citer le travail de Gzara [3] qui traite le problème de conception d'un réseau pour le transport de matières dangereuses. Le gouvernement (leader) souhaite sélectionner un réseau routier qui minimise le risque humains et environnements impliqués dans le déplacement de matières dangereuses. Les transporteurs de matières dangereuses (suiveur) souhaitent réduire leurs coût de transport. La programmation bi-niveaux a été appliquée même à la logistique humanitaire pour optimiser les décisions relatives à la distribution de l'aide internationale après une catastrophe, voir Camacho-Vallejo et al. [1].

Dans ce travail, nous proposons un modèle bi-niveaux pour la localisation de sites indésirables (semi-désirables).

Mots clés : Programmation bi-niveaux, Problèmes de transport, Problèmes de localisation, Sites désirables et semi-désirables.

10.1 Introduction

La plupart des modèles de localisation traitent des installations souhaitables, tels que les entrepôts et les centres de service. Dans de tels cas, l'installation interagit avec les clients et il s'agit généralement de déplacements. En supposant que les frais de déplacement sont directement liés aux distances des voyages, le problème est alors de trouver un emplacement (les nouvelles installations), de sorte que certains fonctions des distances (et donc des coûts de service) soient,minimisés. Cependant, certaines installations sont "indésirables" ou "semi-souhaitable". Par exemple, l'instalation d'une usine chimique ou un réacteur nucléaire, installations militaires et polluantes (bruit, gaz). Bien que nécessaires à la société, ces installations rendent, dans une certaine mesure, un mauvais service aux individus qui se trouvent à proximité. Ils peuvent avoir des effets négatif sur la valeur des propriétés ou peut diminuer la qualité de vie à cause de la pollution et même certaines installations indésirables peuvent poser de sérieux danger pour les personnes vivant à proximité. C'est une préoccupation lors de la localisation d'un réacteur nucléaire, centres pour le traitement ou l'élimination des matières et des déchets dangereux ou d'une installation stratégique qui peut être exposée à des attaques par des agresseurs.

10.2 Modèle bi-niveaux pour la localisation de sites indésirables (semi-désirables)

Supposons qu'une autorité régionale désire ouvrir p sites semi-désirables parmi m, par exemple des usines pour traiter des déchets industriels dangereux, des centrales nucléaires, des usines chimiques, des aéroports...,etc et de l'autre coté les autorités locales ne souhaite pas avoir ses sites dans leurs villes où au moins limiter (réglementer) le nombre de sites semi-désirables en imposant des pénalités (des charges à payer) si le site représente assez de risque sur la population de leurs villes. Dans ce problème il y a deux niveaux de décisions, l'autorité locale qui essaye de réglementer l'ouverture des sites semi-désirables dans le but de minimiser les risques engendrés par l'emplacement de ses sites sur les habitants dans ces villes. L'autorité régionale qui veut ouvrir ses sites en essayant de respecter les règles imposer par l'autorité locale d'une part et de l'autre part en minimisant les coûts d'installations de sites ouverts. Donc le problème peut être modélisé sous forme d'un problème de programmation bi-niveaux, le leader (autorité locale) déclare les distances de sécurité pour chaque ville et les pénalités à payer pour chaque dépassement, son objectif est de minimiser le risque total sur chaque ville en maximisant les distance de sécurité. Tandis que le suiveur (autorité régionale) vise à ouvrir le maximum de sites potentiels avec des coûts minimaux, en essayant d'éviter le paiement des pénalités sauf s'il est obligé de dépasser les distances de sécurité.

Les paramètres de modèle

- $I = \{1, ..., n\}$ ensemble de villes,
- $J = \{1, ..., m\}$ ensemble de sites potentiels,
- C_j le coût d'installation de site ouvert j,
- d_1 et d_2 sont respectivement la distance minimale et maximale de sécurité qui sépare chaque ville de site ouvert,
- d_{ij} la distance entre le site ouvert j et la ville i,
- x_i^1 et x_i^2 sont respectivement les pénalités maximales et minimales pour chaque ville i à payer si les distances de sécurités d_1 et d_2 ne sont pas respectées.
- p le nombre de site à installer,
- q le nombre maximal de sites à installer dans un rayon d autour d'une ville avec $q \leq p$,
- M une constante très grande.

Les variables de décisions de modèle

- Soit x, la variable du leader tel que pour chaque $i \in I$ on a $x_i = \begin{cases} x_i^1 & \text{si } d_{ij} \leq d_1, \\ x_i^2 & \text{si } d_1 < d_{ij} < d_2, \\ 0 & \text{si } d_{ij} \geq d_2. \end{cases}$
- y, la variable du suiveur tel que : $y_j = \begin{cases} 1 \text{ si le site } j \text{ est ouvert }, \\ 0 \text{ si non.} \end{cases}$
- $z_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } d_{ij} y_j \leq d, \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$

Formulation mathématique du problème

Le problème de localisation de sites indésirables (semi-indésirables) peut être modélisé sous forme d'un problème de programmation bi-niveaux qu'on note par (PB) donné comme suit :
L'objectif principal de l'autorité locale (leader) est de maximiser la distance entre l'installation indésirable et les habitants de cette ville. Tandis que le but de l'autorité régionale (suiveur) est de minimiser le coût d'installation plus le coût des pénalités.

$$(PB) \quad \max_{x \in X} \sum_{i=1}^{n} F_i(x_i) \tag{10.1}$$
$$\text{s.c} \quad x_i \geq 0, \qquad \forall\ i \in I, \tag{10.2}$$
$$\min_{y \in Y} f(y_j), \tag{10.3}$$
$$\sum_{j=1}^{m} y_j \leq p, \tag{10.4}$$
$$\sum_{j=1}^{m} z_{ij} \leq q, \qquad \forall\ i \in I, \tag{10.5}$$
$$d_{ij} + M(z_{ij} - 1) \leq dy_j,\ \forall\ i \in I,\ \forall j \in J, \tag{10.6}$$
$$y_j \in \{0,1\}, \qquad \forall j \in J, \tag{10.7}$$
$$z_{ij} \in \{0,1\}, \qquad \forall i \in I,\ j \in J, \tag{10.8}$$

où $F_i(x_i) = \begin{cases} x_i^1 & \text{si} \quad d_{ij} \leq d_1, \\ x_i^1 - x_i^2 d_{ij} & \text{si} \quad d_1 < d_{ij} < d_2, \\ 0 \quad \text{si} \quad d_{ij} \geq 0, \end{cases}$

$f(y_j) = \sum_{j=1}^{m} C_j y_j + \sum_{i=1}^{n} c_i,\ X = \{x : x = (x_i)_{i \in I},\ x_i \geq 0\}$ et $Y = \{y : y_j \in \{0,1\},\ \forall j \in J\}$.

- La contrainte (1) signifier la fonction objectif du leader,
- la contrainte (2) la variable du leader qu'est non négative,
- la contrainte (3) représente la fonction objectif du follower,
- la contrainte (4) assure que le nombre de sites ouverts est inférieure où égale à p,
- la contrainte (5) signifier que le nombre de sites à installer dans un rayon d autour de chaque ville ne dépasse pas q.

Définitions liées au problème (PB)

(i) Le domaine des contraintes du (PB) : $S = \{(x,y) \in X \times Y : (2),(3),(4),(5),(6),(7),(8)\}$.
(ii) la projection de S sur l'ensemble des décisions du leader : $S(X) = \{x \in X : \exists\ y \in Y,\ \text{tel que}\ (x,y) \in S\}$.

(iii) Le domaine des contraintes du suiveur pour chaque x fixé dans $S(X)$ est $S(x) = \{y \in Y : (4), (5), (6), (7)\}$.

(iv) Pour un x fixé dans $S(X)$, l'ensemble de solutions optimales du follower est noté par : $R(X) = arg \min_{y \in S(x)} f(y_j)$.

(v) L'ensemble de solutions réalisables du leader est donné par : $IR = \{(x, y) : (x, y) \in S,\ y \in R(X)\}$.

Pour résoudre le problème (PB), on doit d'abord le transformer en un problème à un seul niveau en utilisant les conditions de KKT du suiveur. Le problème obtenu après transformation est un problème d'optimisation non convexe à variables mixtes. Il convient donc à choisir une méthode de résolution appropriée pour ce type de problèmes.

Références

1. J.F Camacho-Vallejo, E. González-Rodríguez, F. Javier Almaguer, R. González-Ramírez. Bi-level optimization model for aid distribution after the occurrence of a disaster. *Journal of Cleaner Production* 105 :134-145 (2015).
2. S. Dewez, M. Labbé, P. Marcotte, G. Savard. New formulations and valid inequalities for a bilevel pricing problem. *Operations Research Letters* 36 :141-149, (2008).
3. F. Gzara. A cutting plane approach for bilevel hazardous material transport network design. *Operations Research Letters* 41 :40–46 (2013).
4. V. Stackelberg. The theory of the market economy. *Oxford University Press, Oxford* (1952).