Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 17, 2017, pp. 29 - 33

6

Sur l'approche de Stabilité forte des Modèles Stochastiques

O. LEKADIR

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes (LAMOS)
Université de Béjaïa, Béjaïa 06000, Algérie
Tél. (213) 34 81 37 08

Résumé Le concept de stabilité a été largement et longtemps utilisé dans divers sciences. Cependant, il n'existe pas une définition universelle pour la stabilité qui a été souvent adaptée aux besoins spécifiques d'une science particulière ou d'un problème particulier sous la main. Ainsi, la stabilité est peut être l'un des termes scientifiques ayant le plus de significations possibles.
Le sens large de la stabilité peut se comprendre comme l'aptitude d'un système à maintenir son fonctionnement sans changement de sa structure interne malgré les perturbations externes.
Le concept de stabilité a été défini sous forme mathématique par Lyapunov (1892) dans sa thèse intitulée "The general problem of the stability of motion". Il y décrit le comportement de l'équilibre du système solaire.
Plusieurs notions de stabilité et d'instabilité existent dans la théorie des modèles stochastiques, comme c'est le cas dans les systèmes déterministes classiques. C'est le cas, par exemple au niveau des chaînes de Markov. Dans cet article, nous présentons une synthèse des applications de l'approche de stabilité forte aux modèles stochastiques.

Mots clés : Modèles stochastiques concept de stabilité, approche de stabilité forte.

6.1 Introduction

Le concept de stabilité a été largement et longtemps utilisé dans divers sciences. Cependant, il n'existe pas une définition universelle pour la stabilité qui a été souvent adaptée aux besoins spécifiques d'une science particulière ou d'un problème particulier sous la main. Ainsi, la stabilité est peut être l'un des termes scientifiques ayant le plus de significations possibles.
Le sens large de la stabilité peut se comprendre comme l'aptitude d'un système à maintenir son fonctionnement sans changement de sa structure interne malgré les perturbations externes.
Le concept de stabilité a été défini sous forme mathématique par Lyapunov (1892) dans sa thèse intitulée "The general problem of the stability of motion". Il y décrit le comportement de l'équilibre du système solaire.
La stabilité de Lyapunov considère le comportement d'une solution d'un système si son état initial est au voisinage d'un point d'équilibre.
Suite à sa définition et son fondement en tant que technique mathématique, la méthode de stabilité de Lyapunov a trouvé vaste champs d'application en dehors de son contexte original, particulièrement pour analyser les solutions des modèles mathématiques des communautés biologiques pour déterminer les conditions qu'elles doivent satisfaire pour devenir stable.
Le domaine de stabilité, même dans les systèmes dynamiques classiques, a été en grande partie conduit par des phénomènes découverts dans des modèles spécifiques (par exemple, équations différentielles spécifiques).

Les tentatives d'unifier les observations ont créé les théories de stabilité pour les quelles ont a trouvé des applications dans des systèmes autres que ceux pour lesquels elles ont été conçues à l'origine.
Nous constatons la même tendance dans le domaine de stabilité des systèmes stochastiques.
Plusieurs notions de stabilité et d'instabilité existent dans la théorie des modèles stochastiques, comme c'est le cas dans les systèmes déterministes classiques. C'est le cas, par exemple au niveau des chaînes de Markov, la stabilité peut signifier :

- la convergence faible à une distribution stationnaire, à partir d'un état spécifique, ou à partir de tout état.
- Elle pourrait également signifier la convergence "forte", due au couplage.

Il est vrai que, dans des situations concrètes, ce qui précède peut coïncider, mais il y a les classes importantes de systèmes pour lesquels les notions sont et doivent être distinctes.

6.2 Modèles stochastiques

Les modèles mathématiques sur lesquels agissent des influences aléatoires sont dits modèles stochastiques. Ces outils mathématiques sont assez répandus dans les diverses activités humaines. Les modèles stochastiques tendent de plus en plus à remplacer les modèles déterministes dans lesquels les aléas sont ignorés où négligés.
En effet, les exigences actuelles de la pratique ont donné à la modélisation stochastique une place prépondérante dans divers domaines tels que la théorie des files d'attente, la théorie de la fiabilité, la théorie de gestion des stocks, la programmation stochastique, la théorie des jeux, etc.
Un modèle stochastique est un outil décrivant l'état d'un système stochastique. Il peut être perçu comme une transformation ou une application :

$$\mathbf{F} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$$

où $\mathcal{X}$: Paramètres d'entrées et $\mathcal{Y}$: Caractéristiques.
On munira les deux espaces $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ de topologies pour définir des convergences et de métriques pour estimer ces convergences.
Les valeurs prises par les paramètres et les caractéristiques sont de nature aléatoire. Elles peuvent être des processus aléatoires, des distributions de probabilités, des noyaux stochastiques, etc.

Un point $\mathbf{X} \subset \mathcal{X}$ (resp. $\mathbf{Y} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \subset \mathcal{Y}$) est un ensemble de valeurs possibles des paramètres (resp. des caractéristiques).

6.3 Principe général de stabilité d'un modèle stochastique

Un modèle stochastique est dit stable en un point $\mathbf{X} \in \mathcal{X}$, si la proximité de tout point $\mathbf{X}^*$ de $\mathbf{X}$ implique la proximité de leurs images. C'est à dire, l'étude de la stabilité s'intéresse à la vérification de l'implication suivante :

$$\left\{\mathbf{X}^* \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathbf{X}\right\} \Longrightarrow \left\{\mathbf{F}(\mathbf{X}^*) \xrightarrow{\tilde{\mathcal{L}}} \mathbf{F}(\mathbf{X})\right\}, \tag{6.1}$$

où $\mathcal{L}$ et $\tilde{\mathcal{L}}$ sont les types de convergences associées aux topologies définies sur l'ensemble $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ respectivement.
On voit bien que la notion de stabilité renvoie à la continuité de $\mathbf{F}$ relativement aux variations des paramètres et elle dépend de la nature des espaces $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$, des topologies induites sur eux et des types de convergence $\mathcal{L}$ et $\tilde{\mathcal{L}}$. Ceci explique la diversité des notions et méthodes de stabilité existantes dans la littérature.
Le point $\mathbf{X} \subset \mathcal{X}$ est le plus souvent multi-dimensionnel, i.e. $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \cdots, \mathbf{X}_n)$.
Comme il est possible de parler de continuité par rapport à une variable, alors il est possible de parler de stabilité relativement à la variation d'un paramètre.
Ainsi, un modèle est dit stable par rapport aux i^{ieme} paramètre si :

$$\left\{\mathbf{X_i} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathbf{X_i}^*\right\} \Longrightarrow \left\{\mathbf{F}(\mathbf{X_1}, ..., \mathbf{X_i}, ..., \mathbf{X_n}) \xrightarrow{\tilde{\mathcal{L}}} \mathbf{F}(\mathbf{X_1}, ..., \mathbf{X_i^*}, ..., \mathbf{X_n})\right\}.$$

De manière équivalente, l'étude de stabilité peut se présenter comme l'introduction d'une suite de “perturbés" $\{\mathbf{X}^{(r)},\ r \geq 0\}$ du paramètre $\mathbf{X}$ telle que $\lim_{r\to+\infty} \mathbf{X}^{(r)} = \mathbf{X}$; on dira alors que le modèle stochastique $\mathbf{F}$ est stable si la relation suivante est vérifiée :

$$\lim_{r\to+\infty} \mathbf{F}(\mathbf{X}^{(r)}) = \mathbf{F}(\mathbf{X}).$$

Cette étude de stabilité est de type qualitative. Elle permet seulement de statuer sur la stabilité ou non du modèle. Les domaines pratiques actuels exigent à ce que des études quantitatives en plus de ces études qualitatives soient faites, ce qui a donné naissance aux méthodes de stabilité quantitatives. Le principe de ces dernières se base sur le fait d'introduire des mesures de comparabilité, telles que des métriques, afin d'obtenir des estimations quantitatives.
On sait que plusieurs métriques peuvent être associées à un type de convergence. Considérons μ et $\widetilde{\mu}$ des métriques associées aux types de convergence $\mathcal{L}$ et $\tilde{\mathcal{L}}$, ainsi, la condition de stabilité (6.1) peut être reformulée comme suit :
Un modèle stochastique sera dit stable en un point $\mathbf{X}$ si pour toute perturbation X^* de ce point, on a :

$$\left\{\mu(\mathbf{X}, \mathbf{X}^*) \longrightarrow 0\right\} \Longrightarrow \left\{\widetilde{\mu}\Big(\mathbf{F}(\mathbf{X}), \mathbf{F}(\mathbf{X}^*)\Big) \longrightarrow 0\right\}.$$

Lorsque l'estimation qualitative de la stabilité d'un modèle stochastique est établie, l'estimation quantitative de cette stabilité revient à obtenir une évaluation de la déviation des caractéristiques

du modèle.
Ainsi, On dira qu'une estimation quantitative de la stabilité d'un modèle stochastique est a été effectuée, lorsqu'on aurait borné supérieurement la déviation des caractéristiques, i.e. établit une relation du type :

$$\widetilde{\mu}\Big(\mathbf{F}(\mathbf{X}), \mathbf{F}(\mathbf{X}^*)\Big) \leq \varPhi\Big(\mu(\mathbf{X}, \mathbf{X}^*)\Big),$$

où $\varPhi$ est une fonction positive, croissante s'annulant à l'origine.

6.4 Les différentes méthodes de stabilité des Systèmes de files d'attente

Dans la littérature différentes méthodes de stabilité appiquées auw SFA ont étées établies, pour une revue bloballe de ces différentes méthode le lecteur veut voir le chapitre deux de notre thèse de doctorat **[2]**. Le lecteur peut trouver les fondement théorique de la méthode de stabilité forte qui fait l'objet de cet exposé dans notre mémoire de magister **[1]** ansi que dans le chapitre deux de notre thèse **[2]**.

6.4.1 Stabilité des RdP

Les premiers travaux sur la stabilité de SFA modèlisés par des RdP ont utilisé la méthode de Lyapunov. La théorie de la stabilité de Lyapunov fournie les outils nécessaires pour aborder le problème de stabilité pour les Systèmes à événements Discrets (SED) modèlisés par les RdP temporisés, dont le modèle mathématique est donné en termes d'équations différentielles.

• En utilisant des méethodes de Lyapunov, une condition suffisante pour le problème de stabilisation des SFA est également obtenue. Il a été démontré qu'il est possible de restreindre l'epace d'état des SFA de telle sorte que la bornitude du RdP qui lui soit associé soit garantie. Toutefois, cette restriction est vague, difficile à expliciter.

• Cet inconvénient est surmonté par l'examen d'une équation récurrence spécifique, dans l'algèbre max-plus, qui est affectée au modèle graphique du RdP temporisé associé.

6.5 Application de la stabilité forte aux réseaux de Petri stochastiques

Les modèles des RdP associés aux SFA dont la SF est établie :

- $RdPSG - MMPP/M/1 \rightarrow RdPSGI - M/M/1$;
- $RdPSG - MMPP/M/1 \rightarrow RdPSG - M/M/1$:
- $RDPSGI - M/G/1 \rightarrow RdPSGI - M/M/1$.

6.6 Difficultés rencontrées lors de l'application de la SF

- L'identification du paramètre à perturber,
- L'écriture des noyaux de transition,

- Le choix des normes poids appropriées.
- L'obtention des inégalités de stabilité par rapport à la norme à laquelle la stabilté forte du réseau étudié est établie.

6.7 Conclusion

Les méthodes de stabilité des modèles stochastiques sont classées en deux catégories principales, celles dites qualitatives et celles dites quantitatives.
C'est par le biais des propriétés qualitatives que des estimations quantitatives (bornes) peuvent être obtenues mathématiquement et que des approximations peuvent être faites rigoureusement.
Il serait judicieux dans un premier temps d'orienter des études qui consistent à comparer les différentes approches de stabilité des modèles stochastque. Il serait intéressant que cette comparaison aboutisse à établir un lien entre ces différentes méthodes et arriver à unifier les notions de stabilité stochastiques ou du moins à justifier la divergence entre les différentes notions existantes.

- Appliquer la méthode de stabilité forte à l'établissement de la stabilité de systèmes réels.
- Appliquer la stabilité forte à des modèles de réseaux de Petri stochastiques bornés associés aux systèmes de files d'attente et dont la stbilité forte a été établie via la théorie des files d'attente afin de comparer les deux approches stabilité forte des files d'attente et la stabilité des modèles de réseaux de Petri qui leurs sont associés.
- Appliquer la stabilité forte à d'autres modèles de réseaux de Petri stochastiques.
- utiliser la méthode de stabilité forte pour stabiliser des systèmes.

Références :

[1] Lekadir Ouiza, Stabilité forte d'un réseau de Jackson à deux stations en tandem. Mémoire de magister, Département de Recherche Opérationnelle, Université A/Mira de Béjaia, 2001.

[2] Lekadir Ouiza, Stabilité forte dans les réseaux de files d'attente, Thèse de doctorat, Département de Recherche Opérationnelle, Université A/Mira de Béjaia, 2016.