Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 17, 2017, pp. 11 - 15

3

Sur la programmation bi-niveaux et ses applications aux problèmes de transport

K. BOUIBED

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes (LAMOS)
Université de Béjaïa, Béjaïa 06000, Algérie
Tél. (213) 34 81 37 08 karima.bouibed@gmail.com

Résumé Dans ce travail, nous avons étudié quelques applications des problèmes de programmation bi-niveaux dans le domaine de transport à savoir le transport de matières dangereuses ainsi que la logistique humanitaire.

Mots clés : Programmation bi-niveaux, Transport de matières dangereuses, Logistique humanitaire.

3.1 Introduction

Plusieurs problèmes de prise de décision nécessitent des compromis parmi les objectifs de tous les individus ou entités qui interagissent de manière non-triviale les unes avec les autres. En principe, les décideurs sont regroupés dans une structure administrative ou hiérarchique avec des objectifs indépendants et parfois contradictoires. Par exemple, la planification économique centralisée implique la distribution des ressources à travers les niveaux de gouvernement, la tarification du transport routier qui consiste à la détermination de péages optimaux sur un ensemble prédéfini de tronçons du réseau autoroutier par les gestionnaires de ces réseaux, la distribution de crédit agricole, la tarification électrique utilitaire et la planification, et la détermination de crédit d'impôt qui sont naturellement formulés comme des problèmes de la programmation bi-niveaux. Donc la programmation bi-niveaux est une technique puissante et robuste pour la résolution de problèmes hiérarchiques de prise de décision. Elle a été appliquée dans de nombreux problèmes de la vie réelle tels que l'agriculture, la production de bio-carburant, des systèmes économiques, des finances, de l'ingénierie, la sciences de gestion et les problèmes de transport.

Cette classe de programmation constitue une branche de la programmation mathématique dans laquelle les contraintes sont déterminées, en partie par un autre problème d'optimisation. Il faudrait souligner que l'utilisation de la programmation mathématique dans différents processus décisionnels est restée pendant de nombreuses années consacrée aux problèmes pour lesquels un décideur unique (gouvernement, politicien, institution, organisation) avait un contrôle unilatéral sur le niveau d'activités à assigner à tous les objectifs ou variables de décision.

Depuis les années 70, l'introduction de la programmation mathématique à plusieurs niveaux a consacré la décentralisation du niveau de prise de décision en tenant compte de la réaction des autres décideurs. Souvent, les décideurs intervient dans un système hiérarchisé où ils peuvent agir soit de façon coopérative, soit de façon non coopérative. La programmation mathématique à plusieurs niveaux résout le problème de la coordination du processus de prise de décision dans un système décentralisé, notamment lorsque les décideurs agissent de façon non coopérative et que les décisions sont prises d'une manière séquentielle. L'origine de la programmation bi-niveaux est due à Stackelberg qui a introduit un modèle en concurrence parfaite dans le contexte d'un duopole [7]. Ce modèle est caractérisé par l'existence d'une précédence dans l'annonce des décisions de deux firmes : un producteur se voit assigner le rôle de meneur (premier niveau de décision) et annonce son niveau de production au suiveur (second niveau de décision) dans la détermination de sa propre production. Par la suite, le meneur agit en connaissant la réaction optimale du suiveur à son annonce.

La première formulation de problème de programmation bi-niveaux apparue dans un article de Bracken et McGill [2] sur la répartition des ressources et des armes pour optimiser l'attaque et la défense simultanément. Cependant, Candler et Norton [4] ont été les premiers à utiliser les termes bi-niveaux et multi-niveaux tout en décrivant un problème de politique de développement. Anandalingam et Friez [1], Vicente et Calamai [8] et Dempe [5] présentent dans des revues bibliographiques, les applications de la programmation bi-niveaux, les propriétés théoriques liées à la programmation bi-niveaux et les différentes classes d'algorithmes de résolution.

3.2 Formulation mathématique d'un problème bi-niveaux

Un problème de programmation bi-niveaux est une modélisation d'un programme mathématique hiérarchique où l'ensemble de toutes les variables est partitionné entre un vecteur x représentant le premier niveau de décision, et un vecteur y pour le second niveau de décision. Sa formulation est donnée en général comme suit :

$$(PB)\begin{cases} \min\limits_{x\in X} F(x,y), \\ s.c\ \ G(x,y) \leqq\ 0, \\ \qquad \min\limits_{y\in Y} f(x,y), \\ \qquad g(x,y) \leqq 0, \end{cases}$$

où $x \in X \subset \mathbb{R}^{n_1}$ la variable de décision du niveau supérieur (leader) et $y \in Y \subset \mathbb{R}^{n_2}$ la variable de décision du niveau inférieur (suiveur). De même les fonctions $F : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont respectivement les fonctions objectifs du niveau supérieur et du niveau inférieur, les fonctions vectorielles $G : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \longrightarrow \mathbb{R}^{m_1}$ et $g : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \longrightarrow \mathbb{R}^{m_2}$ sont les contraintes du problème (PB).

3.3 Transport de matières dangereuses : Modèle bi-niveaux

La conception des réseaux routiers pour le transport de matières dangereuses par l'approche bi-niveaux. Le gouvernement (leader) souhaite sélectionner un réseau routier qui minimise les risques humains et environnementaux impliqués dans le déplacement de matières dangereuses.

Les transporteurs de matières dangereuses (suiveurs) souhaitent réduire leurs coûts de transport [6].
Le réseau est représenté par un graphe orienté $G=(V,A)$ où V est l'ensemble des noeuds et A l'ensemble des arcs, un noeud correspond à l'intersection des routes et l'arc correspond à une partie de route. Le gouvernement souhaite trouver un réseau pour minimiser le risque total encourus lorsqu'un ou plusieurs transporteurs utilisent le réseau pour transporter K marchandises entre leurs origines et leurs destinations respectives. Chaque produit k correspond à une paire origine-destination $(s(k),t(k))$ et $d_k, k\in\{1,...,K\}$ le nombre de livraisons correspondant à chaque camion, r_{ijk} le risque associé au flux d_k du produit k sur l'arc (i,j), c_{ijk} le coût associé au flux d_k du produit k sur l'arc (i,j), x un vecteur colonne de variables binaires où $x_{ij}=1$ si l'arc (i,j) est utilisé par le produit k dans le réseau optimal, y un vecteur colonne de variables binaires où $y_{ij}=1$ si l'arc (i,j) ou (j,i) est dans la solution du réseau, r et c les vecteurs lignes de risque et de coût conforme avec r_{ijk} et c_{ijk} respectivement.
Le modèle bi-niveaux est donné comme suit :

$$(PB)_{md}\begin{cases}\min\limits_{y} rx,\\ \quad \text{s.c } y\in Y,\\ \quad x\in arg\min cx,\\ \quad \text{s.c } x\in X,\\ \quad x_{ijk}\le y_{ij},\\ \quad x,y \text{ binaires,}\end{cases} \tag{3.1}$$

où $Y=\{y_{ij}: y_{ij}=y_{ji},\ (i,j),\ (j,i)\in A\}$,

$X=\{x_{ijk},\ j\in V,\ k\in\{1,...,K\}:\sum\limits_{i\in V}x_{ijk}-\sum\limits_{i\in V}x_{jik}=b_{jk}\}$ et $b_{jk}=\begin{cases}-1 \text{ si } j=s(k),\\ 1 \quad \text{si } j=t(k),\\ 0 \quad \text{sinon.}\end{cases}$

3.4 Logistique humanitaire : Modèle bi-niveaux

Le modèle bi-niveaux proposé pour la logistique humanitaire dans le but d'optimiser les décisions relatives à la distribution de l'aide internationale après une catastrophe. Le pays touché par la catastrophe (leader) doit choisir les moyens de transport pour la livraison et la distribution rapide des biens de secours. Les pays étrangers ou les organisations internationales (suiveurs) peuvent choisir le centre de stockage où ils expédient l'aide en cherchant à réduire le coût de leurs actions (minimiser le coût d'expédition) [3].
Soit $i\in I$ les pays étrangers ou les organisations internationales destinés à aider le pays touché par une catastrophe, $j\in J$ sont des endroits spécifiques où ils peuvent recevoir de l'aide en nature dans le pays touché (centres de stockage), $k\in K$ sont les endroits qu'ont besoin d'une aide urgente, $l\in L$ désigne un produit spécifique (eau potable, médicaments, aliments en conserve, vêtements, etc.), $m\in M$ représente le moyen de transport utilisé pour envoyer ou distribuer les

produits (terre, air ou mer), t^1_{ijlm} le temps d'une expédition du produit l par le moyen du transport m de pays étranger ou d'une organisation internationale i au centre du stockage j, t^2_{jklm} est le temps nécessaire pour distribuer une livraison du produit l au moyen du transport m du centre de stockage j à la zone touchée k, v_l un volume occupant un chargement de maintien du produit l et avec un espace de capacité limité V_j dans chaque centre du stockage j. Dans chaque zone touchée k, on connaît la demande D_{kl} de chaque produit l et chaque organisation internationale i aura une quantité maximale H_{il} du produit l disponible, c_{ijm} est le coût de l'envoi d'une expédition par des moyens de transport du l'organisation i au centre du stockage j, x_{ijlm} le montant des expéditions du produit l envoyé par le moyen du transport m du l'organisation internationale i au centre du stockage j, y_{jklm} le montant des expéditions du produit l envoyé par le moyen du transport m du centre du stockage j à la zone touchée k.

$$\min_{y_{jklm},x_{ijlm}} \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{l\in L}\sum_{m\in M} T^1_{ijlm} + \sum_{j\in J}\sum_{k\in K}\sum_{l\in L}\sum_{m\in M} T^2_{jklm}, \tag{3.2}$$

$$\text{s.c} \sum_{k\in K}\sum_{l\in L}\sum_{m\in M} v_l y_{jklm} \le V_j,\ \forall j\in J, \tag{3.3}$$

$$\sum_{j\in J}\sum_{m\in M} y_{jklm} \ge D_{kl},\ \forall k\in K,\ l\in L, \tag{3.4}$$

$$y_{jklm} \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\},\ \forall j\in J,\ k\in K,\ l\in L,\ m\in M, \tag{3.5}$$

$$x_{ijlm} \in \arg\min_{\bar{x}_{ijlm}} \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{l\in L}\sum_{m\in M} c_{ijm}\bar{x}_{ijlm}, \tag{3.6}$$

$$\text{s.c} \quad \sum_{i\in I}\sum_{m\in M} \bar{x}_{ijlm} = \sum_{k\in K}\sum_{m\in M} y_{jklm},\ \forall j\in J,\ l\in L, \tag{3.7}$$

$$\sum_{j\in J}\sum_{m\in M} \bar{x}_{ijlm} \le H_{il},\ \forall i\in I,\ l\in L, \tag{3.8}$$

$$\bar{x}_{ijlm} \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\},\ \forall i\in I,\ j\in J,\ l\in L,\ m\in M, \tag{3.9}$$

où les variables auxiliaires T^1_{ijlm} et T^2_{jklm} sont définies comme suit :

$$T^1_{ijlm} = \begin{cases} t^1_{ijlm} & si\ x_{ijlm} \ge 1, \\ 0, & sinon. \end{cases} \tag{3.10}$$

$$et \quad T^2_{jklm} = \begin{cases} t^2_{jklm} & si\ \ y_{jklm} \ge 1, \\ 0, & sinon. \end{cases} \tag{3.11}$$

Références

1. G. Anandalingam and T.L. Friesz. Hierarchical optimization : An introduction. *Ann. Oper. Res.,* 34 :1-11 (1992).
2. J. Bracken and J.T. McGill. Mathematical programs with optimization problems in the constraints. *Oper. Res.,* 21 :37-44 (1973).
3. J.F Camacho-Vallejo, E. González-Rodríguez, F. Javier Almaguer, R. González-Ramírez. Bi-level optimization model for aid distribution after the occurrence of a disaster. *Journal of Cleaner Production* 105 :134-145 (2015).

4. W. Candler and R. Norton. Multilevel programming. *Technical Report 20, World Bank Development Research Center, Washington D.C.* (1977).
5. S. Dempe. Annotated bibliography on bilevel programming and mathematical programs with equilibrium constraints. *Optimization* 52 :333-359 (2003).
6. F. Gzara. A cutting plane approach for bilevel hazardous material transport network design. *Operations Research Letters* 41 :40–46 (2013).
7. V. Stackelberg. The theory of the market economy. *Oxford University Press, Oxford* (1952).
8. L.N. Vicente and P.H. Calamai. Bilevel and multilevel programming : A bibliography review. *J. Glob Optim., 5 :291-306* (1994).