Critère d'optimalité dans un problème dual de programmation linéaire avec une direction hybride.

R. Guerbane & M.O. Bibi

Doctoriales de Recherche Opérationnelle, le 12 et 13 Décembre 2018.

Introduction

La programmation linéaire est considérée comme l'une des branches les plus importantes de la recherche opérationnelle. Dans **[3]**, une nouvelle direction d'amélioration pour la méthode adaptée, appelée direction hybride, a été proposée pour la résolution des problèmes linéaires à variables bornées. En utilisant cette nouvelle direction, nous avons calculé l'accroissement de la fonction duale, qui nous a permis de formuler le critère d'optimalité pour le problème dual comme une généralisation de celui de la méthode adaptée avec direction standard **[2].**

Position du problème et définitions

Considérons le problème (P) de programmation linéaire à variables bornées, s'écrivant sous la forme canonique suivante:

$$(P)\begin{cases} Z(x) = c^T x \to max, \\ Ax = b, \\ l \leq x \leq u, \end{cases} \qquad (1)$$

- Un vecteur x vérifiant les contraintes du problème (1), est une **S**olution **R**éalisable **(SR)** du problème (1). L'ensemble des solutions réalisables est alors donné par :

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, l \leq x \leq u\}.$$

- Une solution réalisable x^0 est dite optimale si :

$$Z(x^0) = c^T x^0 = \max_{x \in X} c^T x.$$

- D'autre part, une solution réalisable x^ε est appelée ε-optimale ou suboptimale si :

$$Z(x^0) - Z(x^\varepsilon) = c^T x^0 - c^T x^\varepsilon \leq \varepsilon,$$

ou x^0 est une solution optimale du problème (1) et ε un nombre supérieur ou égal à zéro choisi à l'avance.

- Soit un sous-ensemble d'indices $J_B \subset J$, tel que $J_B \cap J_N = \emptyset$, $| J_B | = m$.
- En vertu de la partition de $J = J_B \cup J_N$, on peut alors écrire et fractionner les vecteurs et les matrices de la manière suivante :

$$c = (c_B, c_N) \qquad x = (x_B, x_N) \qquad A = A(I, J) = (A_B \mid A_N)$$

Plan dual de support

Considérons le dual du problème de programmation linéaire (1):

$$\begin{cases} L(\lambda) = b^T y - v^T l + w^T u \to min, \\ A^T y - c - v + w = 0, \\ w \geq 0, v \geq 0, \end{cases} \qquad (2)$$

où $\lambda = (y, v, w) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, le vecteur y étant sans restriction de signe . Le vecteur $\lambda = (y, v, w)$ est appelé plan dual (ou solution réalisable duale) s'il vérifie les contraintes de problème(5). Le vecteur $\delta = A^T y - c$ est alors dit coplan.

- Le couple $\{\lambda, J_B\}$, formé d'une solution réalisable duale λ et d'un support J_B, est appelé **S**olution **R**éalisable **D**uale de **S**upport (SRDS) du problème (2).

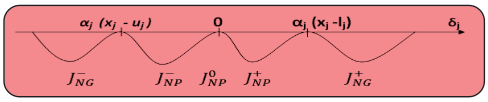
Les plans duaux ***ʎ=(y ,v, w)*** vérifiant les relations suivantes sont dits accordés **[1].**

$$\begin{cases} v_j = \delta_j, & w_j = 0, & \text{si } \delta_j \geq 0, \\ v_j = 0, & w_j = -\delta_j, & \text{si } \delta_j < 0, \end{cases} \qquad j \in J.$$

Soit {δ,JB} un coplan de support du problème (2) et une solution réalisable du problème (1)

On prend $\alpha_j \in [0,1]$ pour $j \in J_N$ et on définit les ensembles suivants:

$$\begin{aligned} J_{NG}^+ &= \{j \in J_N : \delta_j > \alpha_j(x_j - l_j)\}, J_{NG}^- = \{j \in J_N : \delta_j < \alpha_j(x_j - u_j)\}, \\ J_{NP}^+ &= \{j \in J_N : 0 < \delta_j \leq \alpha_j(x_j - l_j)\}, J_{NP}^- = \{j \in J_N : \alpha_j(x_j - u_j) \leq \delta_j < 0\}, \\ J_{NP}^0 &= \{j \in J_N : \delta_j = 0\}, J_{NP} = \{j \in J_N : \alpha_j(x_j - u_j) \leq \delta_j \leq \alpha_j(x_j - l_j)\}, \\ J_{NP} &= J_{NP}^+ \cup J_{NP}^- \cup J_{NP}^0. \end{aligned}$$



Considérons le vecteur κ, où les composantes non basique

$$\kappa_j = \begin{cases} l_j, & \text{si } j \in J_{NG}^+ \\ u_j, & \text{si } j \in J_{NG}^- \\ x_j \in [l_j, u_j] & \text{si } j \in J_{NP}^0. \end{cases} \qquad (4)$$

Vu que **A*K*=b**, les composantes basiques du vecteur ***k*** vérifient donc :

$$\kappa_B = \kappa(J_B) = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N \kappa_N.$$

Le vecteur *k est* appelée pseudo-solution *du* problème *(1)*.

Remarque

Un vecteur d tel que $d = \kappa - x$ est appelée direction primale hybride. Si $\alpha_j = 0 \ \forall j \in J_N$, on aura alors :
$J_{NP}^+ = J_{NP}^- = \emptyset, J_{NG}^+ = \{j \in J_N : \delta_j > 0\}, J_{NG}^- = \{j \in J_N : \delta_j < 0\},$
$J_{NP} = J_{NP}^0 = \{j \in J_N : \delta_j = 0\}$, *donc*

$$\kappa_j = \begin{cases} l_j, & si \ j \in J_{NG}^+ \\ u_j, & si \ j \in J_{NG}^- \\ x_j \in [l_j, u_j] & si \ j \in J_{NP}^0. \end{cases}$$

On retrouve alors la direction standard [2].

Accroissement de la fonction duale et critère d'optimalité

Soit {δ,JB} un coplan de support correspondant à un plan dual accordé de support {ʎ, JB} du problème (2), avec ʎ=(*y* , *v* , *w*). Considérons un autre plan accordé $\lambda(\sigma) = (y(\sigma), v(\sigma), w(\sigma))$

avec:

$$\lambda(\sigma) = \lambda + \sigma\Delta\lambda, \ \ y(\sigma) = y + \sigma\Delta y = y + \sigma s, \ \ v(\sigma) = v + \sigma\Delta v = v + \sigma p, \ w(\sigma) = w + \sigma\Delta w = w + \sigma q, \ \ \delta(\sigma) = \delta + \sigma\Delta\delta = \delta + \sigma t, \ \ \sigma \geq 0.$$

calculons l'accroissement de la fonction objectif ***L*** du problème ***(4)***

$$\begin{aligned} \Delta L(\lambda) = L(\lambda(\sigma)) - L(\lambda) &= \sigma(b^T s - l^T p + u^T q) = \sigma \sum_{j \in J} (\kappa_j t_j - l_j p_j + u_j q_j) \\ &= \sigma \sum_{j \in J_B} (\kappa_j t_j - l_j p_j + u_j q_j) + \sigma \sum_{j \in J_N} (\kappa_j t_j - l_j p_j + u_j q_j) \\ &= S_B(\sigma) + S_N(\sigma), \end{aligned}$$

Pour un sous-ensemble **J1** de **J** , définissons les ensembles suivantes :

$$\begin{aligned} J_1^{++} &= \{j \in J_1 : \ \delta_j > 0, \delta_j(\sigma) \geq 0\}, \\ J_1^{+-} &= \{j \in J_1 : \ \delta_j > 0, \delta_j(\sigma) < 0\}, \\ J_1^{0+} &= \{j \in J_1 : \ \delta_j = 0, \delta_j(\sigma) \geq 0\}, \\ J_1^{0-} &= \{j \in J_1 : \ \delta_j = 0, \delta_j(\sigma) < 0\}, \\ J_1^{-+} &= \{j \in J_1 : \ \delta_j < 0, \delta_j(\sigma) \geq 0\}, \\ J_1^{--} &= \{j \in J_1 : \ \delta_j < 0, \delta_j(\sigma) < 0\}. \end{aligned}$$

D'après **[4],** la sous somme **SN** peut être estimée de la manière suivants :

$$S_N(\sigma) = S_N^{++}(\sigma) + S_N^{+-}(\sigma) + S_N^{0+}(\sigma) + S_N^{0-}(\sigma) + S_N^{-+}(\sigma) + S_N^{--}(\sigma), \text{ avec}$$

$$\begin{cases} S_N^{++}(\sigma) = \sigma \sum_{j \in J_N^{++}} t_j(\kappa_j - l_j), \\ S_N^{+-}(\sigma) = \sum_{j \in J_N^{+-}} [\delta_j(\sigma)(\kappa_j - u_j) - \delta_j(\kappa_j - l_j)], \\ S_N^{0+}(\sigma) = \sigma \sum_{j \in J_N^{0+}} t_j(\kappa_j - l_j) \geq 0, \\ S_N^{0-}(\sigma) = \sigma \sum_{j \in J_N^{0-}} t_j(\kappa_j - u_j) \geq 0, \\ S_N^{-+}(\sigma) = \sum_{j \in J_N^{-+}} [\delta_j(\sigma)(\kappa_j - l_j) - \delta_j(\kappa_j - u_j)], \\ S_N^{--}(\sigma) = \sigma \sum_{j \in J_N^{--}} t_j(\kappa_j - u_j). \end{cases}$$

Remarque

Si $\alpha_j = 0 \ \forall j \in J_N$, on aura alors : $J_{NP}^{++} = J_{NP}^{--} = J_{NP}^{+-} = J_{NP}^{-+} = \emptyset$, donc : $S_N^{++} = S_N^{--} = 0$, on retrouve l'accroissement de la fonction duale avec la direction adaptée standard [2].

Théorème: (critère d'optimalité)

Les relations :

$$\delta_j = \begin{cases} \alpha_j(x_j - l_j), & si \ \ j \in J_{NP}^+, \\ \alpha_j(x_j - u_j), & si \ \ j \in J_{NP}^-, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \kappa_j = l_j, & pour \ \ \delta_j > 0, \\ \kappa_j = u_j, & pour \ \ \delta_j < 0, \\ l_j \leq \kappa_j \leq u_j, & pour \ \ \delta_j = 0, \end{cases} \qquad j \in J_B$$

sont suffisantes, et dans le cas de la non dégénérescence du coplan {δ,JB} aussi nécessaires pour l'optimalité du coplan δ. De plus, la pseudo-solution ***K*** vérifiant ces relations est solution optimale dans le problème **(1).**

Conclusion

Dans un problème dual de programmation linéaire et avec une direction hybride, nous avons montré un critère d'optimalité qui généralise celui de la méthode adaptée **[2].** Dans un prochain travail, on élaborera sur la base de ce critère un algorithme primal-dual de programmation linéaire avec direction hybride.

Références

1. **R. Gabasov and F. M. Kirillova, Methods of linear programming, Vol. 1, 2 and 3, Edition of the Minsk University, 1977, 1978 and 1980 (in Russian).**
2. **R. Gabasov. Adaptive method of linear programming. Preprints of the university of Karlsruhe, Institute of Statistics and Mathematics, Germany, 1993 .**
3. **M. O. Bibi and M. Bentobache. A hybrid direction algorithm for solving linear programs. Internationel Journal of Compute Mathematics, 92, 201-216, 2015.**
4. **E. Kostina, The long step rule in the bounded- variable dual simplex method: Numerical experiments, Mathematical Methods of Operations Research 3(55), pp. 413-429, 2002.**