Le modèle Les probabilités de transition en une étape nous permettent d'établir l'expression du noyau de transition associé à la chaine de Markov {X_n; n
0} donné par :

Stabilité forte dans un modèle de gestion de stocks

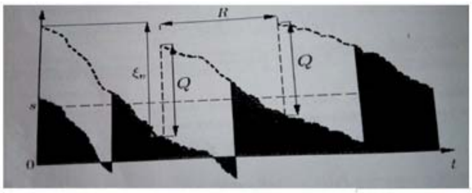
N. Aiane, F. Aoudia, D. Aissani

Journées des Doctoriales, le 12 et 13 Décembre 2018

Introduction

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à l'application de la méthode de stabilité forte à un modèle stochastique de gestion des stocks mono article avec livraison instantanée vue qu'il existe peu de travaux sur l'applicabilité de cette dernière au modèle de gestion de stocks [1, 2, 4]. Dans un premier temps, nous avons déterminé le noyau de transition ainsi que la chaine de Markov décrivant notre système. Dans un deuxième temps, nous avons établi les résultats de la V-stabilité forte de notre système ainsi que les inégalités de stabilité pour estimer l'erreur commise lors de l'approximation de notre modèle de gestion des stocks par un autre modèle identique en structure mais la différence réside dans le paramètre de la loi de la demande. Les résultats obtenus seront valorisés par une application numérique.

Le modèle



Les probabilités de transition en une étape nous permettent d'établir l'expression du noyau de transition associé à la chaine de Markov {X_n; n 0} donné par :

$$P_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=i+l_nQ}^{\infty} a_k & Si \quad i \le s \quad et \quad j = 0; \\ a_{i-j+l_nQ} & Si \quad 0 < i \le s \quad et \quad 0 < j \le s; \\ \mathrm{P}a_{i-j+l_nQ} & Si \quad i \le s \quad et \quad j > s; \\ \sum_{k=i}^{\infty} a_k & Si \quad i > s \quad et \quad j = 0; \\ a_{i-j} & Si \quad s+1 \le i \le s+Q \quad et \quad 0 < j \le i; \\ 0 & Si \quad s+1 \le i \le s+Q \quad et \quad j > i. \end{cases}$$

V-stabilité forte du modèle étudié

Pour prouver la V-stabilité forte de la chaine X_n, il suffit de choisir une fonction test $v(k) = \beta^k$ où $\beta > 1.$

Une fonction mesurable :

$$h = \begin{cases} 1 & \text{Si } 0 \le i \le s \\ 0 & \text{Si } s < i \le s+Q \end{cases}$$

et la mesure :

$$\alpha_j = P_{sj}$$

Vérifiant les conditions exigées par la méthode de stabilité établies par Aissani et Kartashov [3] énoncée par le corollaire suivant :

Corollaire

Pour que la chaine de Markov X récurrente au sens de Harris soit fortement v-stable, il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

1. $\exists \alpha \in \mathcal{M}^+, \exists h \in f\varepsilon^+$ telles que : $\pi h > 0, \alpha \mathbb{1}=1, \alpha h > 0$;
2. Le noyau $T = P - h o \alpha$ est non négatif ;
3. $\exists \rho < 1$ tel que, $Tv(x) \le \rho v(x), \forall x \in E$.

On vérifie maintenant que $\|P\|_v < \infty$:

$$\|P\|_v = \sup_{k \in \{0,\dots,s+Q\}} \frac{1}{\beta^k} \sum_{j=0}^{s+Q} P_{kj}\beta^j = Sup(A,B)$$

où

$$A = \sup_{k \in \{0,\dots,s\}} \frac{1}{\beta^k} \sum_{j=0}^{s+Q} P_{kj}\beta^j \le \sup_{k \in \{0,\dots,s\}} \frac{1}{\beta^k}[1 - \sum_{i=0}^{k+l_nQ-1} a_i + \beta^{k-i+l_nQ} \sum_{i=k+l_nQ-s-Q}^{k+l_nQ-1} a_i]$$

et

$$B = \sup_{k \in \{s+1,\dots,s+Q\}} \frac{1}{\beta^k} \sum_{j=0}^{s+Q} P_{kj}\beta^j < 1 + \sum_{i=0}^{s+Q-1} a_i(\beta^{s+Q-i} - 1)$$

donc

$$\|P\|_v < \infty$$

Les inégalités de stabilité permettent d'estimer l'écart entre les distributions stationnaires des chaines de Markov X_n et X_n'. Afin d'établir ces inégalités on doit appliquer le corollaire suivant :

Corollaire

Pour $\Delta = Q - P$ vérifiant la condition $\|\Delta\|_v < C^{-1}(1-\rho)$, on a :

$$\|\nu - \pi\|_v \le \|\Delta\|_v \|\pi\|_v C(1 - \rho - C\|\Delta\|_v)^{-1};$$

où

$$C = m\|P\|_v^{m-1}(1 + \|\mathbb{1}\|_v \|\pi\|_v);$$

et

$$\|\Delta\|_v \le (\alpha v)(1-\rho)^{-1}(\pi h) m \|P\|_v^{m-1}.$$

dans le cas où m=1, on a : $C = 1 + \|\mathbb{1}\|_v \|\pi\|_v$.

Déviation des noyaux de transitions

La déviation du noyau de transition de la chaine X_n par rapport à celui de la chaine X_n' est donnée par la formule suivante :

$$\|P - Q\|_v = \sup_{k \in \{0,\dots,s+Q\}} \frac{1}{\beta^k} \sum_{j=0}^{s+Q} |P_{kj} - Q_{kj}|\beta^j = sup(C,D)$$

où

$$C = \sum_{i=l_nQ}^{\infty} |a_i - a_i'| + \sum_{i=l_nQ-s}^{l_nQ-1} |a_i - a_i'|\beta^{l_nQ-i} + P \sum_{i=l_nQ-Q-s}^{l_nQ-s-1} |a_i - a_i'|\beta^{l_nQ-i}$$

et

$$D \le \left[\frac{\sum_{i=s+1}^{\infty} |a_i - a_i'|}{\beta^{s+1}} + \sum_{i=0}^{s} |a_i - a_i'|\beta^{-i} \right]$$

L'expression finale est :

$$\|\omega\|_v = \sup_{k \in \{s+1,\dots,s+Q\}} \frac{1}{\beta^k} \left[1 + \sum_{i=0}^{k-1} A_i(\beta^{k-i} - 1) \right]$$

Où:

$$A_i = |a_i - a_i'|$$

Exemple numérique

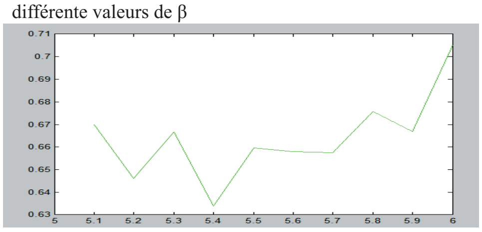
Nous appliquons les résultats ci-dessus pour le modèle (R, s, lnQ) avec comme paramètres :

R=1, s=4, Q=5, λ=5.

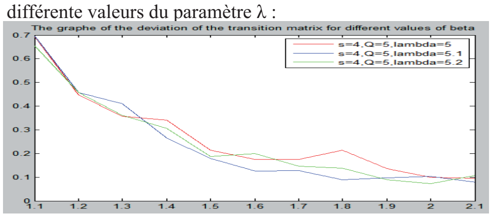
La matrice de transition est la suivante :

0.0402	0.0649	0.0949	0.1024	0.1640	0.2726	0.0384	0.1504	0.0721
0.0213	0.1776	0.0440	0.1874	0.1491	0.1710	0.0341	0.1465	0.0690
0.1572	0.0245	0.3666	0.0072	0.0103	0.0573	0.1260	0.1875	0.0635
0.0846	0.0925	0.0146	0.0243	0.0507	0.1187	0.3075	0.2879	0.0193
0.0093	0.0461	0.1584	0.0693	0.7170	0	0	0	0
0.0193	0.1065	0.0297	0.6325	0.0754	0.1367	0	0	0
0.0239	0.0351	0.2725	0.1075	0.0639	0.3480	0.1491	0	0
0.0563	0.2849	0.0671	0.1860	0.0990	0.0029	0.0414	0.2625	0
0.0404	0.3109	0.1221	0.0901	0.1172	0.0594	0.0909	0.0821	0.0869

La déviation du noyau de transition de la chaine X_n pour différente valeurs de β



La déviation du noyau de transition de la chaine X_n pour différente valeurs du paramètre λ :



Conclusion

Dans ce travail, nous nous sommes intéressées à l'étude de la stabilité forte dans un modèle de gestion des stocks à revue périodique de type (R, s, l_nQ) avec livraison instantanée. Nous avons ainsi pu analyser le comportement de notre système de gestion des stocks et obtenir des estimations qualitatives et quantitatives de stabilité. Ceci nous permettra d'estimer l'erreur commise lors de l'approximation d'un modèle de stock de type (R, s, l_nQ) par un autre modèle de même structure en cas de perturbation de certains de ses paramètres.

Références

1. B. Rabta and D. Aissani. Estimate of the Strong Stability in an (R; s; S) Inventory Model. Journal of Mathematical Sciences, 131 (3) : 5669-5673, 2005.
2. B. Rabta and D. Aissani. Stability Analysis in an Inventory Model. Theory of Stochastic Processes, (26) : 129-135, 2004.
3. D. Aissani and N.V. Kartashov. Ergodicity and Stability of Markov Chains with Respect to Operator Topology in the Space of Transition Kernels. Doklady Akademii Nauk Ukrainskoi SSR seriya A 11 : 3-5, 1983.
4. Z. Mouhoubi. Bornes de Perturbation des Caractéristiques Transitoires et Stationnaires des Chaines de Markov à Espace d'états Général. Thèse de doctorat en mathématiques appliquées. Université de Béjaia.