Système d'attente équivalent au modèle de risque classique à deux dimensions approche numérique

Safia HOCINE, Zina BENOUARET et Djamil AÏSSANI

Doctoriales de Recherche Opérationnelle, le 12 et 13 Décembre 2018

Introduction

Dans ce travail, nous étudions l'interaction entre un modèle de risque bidimensionnel et un système d'attente spécifique. En particulier, nous nous intéressons à la dualité qui existe entre un système d'attente le modèle de risque classique à deux dimensions. Par la suite, nous illustrons numériquement cette dualité par une approche de simulation.

Description du modèle de risque classique à deux dimensions:
La théorie du risque a pour objectif l'analyse mathématique des fluctuations aléatoires dans les opérations d'assurance. Le premier but de la théorie de la ruine a donc été de modéliser l'évolution de la richesse de la compagnie d'assurance par un processus stochastique, d'évaluer sa probabilité de ruine, c'est-à-dire la probabilité que le scénario introduisant un échec se réalise, (cf. [2]).

Si la compagnie d'assurance possède deux types d'activités, que nous appelons branches, le modèle de risque classique de cette compagnie d'assurance est décrit par le processus suivant:

$$X(t)=\begin{pmatrix}X_1(t)\\X_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}t-\sum_{j=1}^{N(t)}\begin{pmatrix}Z_j^1\\Z_j^2\end{pmatrix},\qquad t\ge 0,\qquad (1)$$

$\{X(t),t\ge 0\}$, où $X(t)=(X_1,(t),X_2(t))$ représente la fortune de la compagnie d'assurance à l'instant t,

$\{N(t),t\ge 0\}$ est un processus de Poisson de paramètre λ

où $N(t)$ est le nombre total de réclamations dans l'intervalle $[0,t]$,

$\{Z(t),t\ge 0\}$, avec $Z(t)=\sum_{j=1}^{N(t)}\begin{pmatrix}Z_j^1\\Z_j^2\end{pmatrix}$ est le montant cumulé des réclamations.

(u_1,u_2) est le surplus initial,

(c_1,c_2) est le taux de prime constant par unité de temps.

La probabilité de ruine exprimée en fonction du processus inverse associé au modèle de risque considéré, en temps fini et infini sont:

$$\psi(u)=\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}(V_n>u)=1-\phi(u)\qquad (2)$$

$$\psi_n(u)=\mathrm{P}(V_n>u)=1-\phi(u,t)\qquad (3)$$

avec $\phi(.)$ est la probabilité de non-ruine

Nous avons les interprétations suivantes pour les modèles de risque

$\{A_n,n\ge 1\}$ est le processus des inter-arrivées des réclamations.

$\{B_n,n\ge 1\}$ est le processus des montants successifs des réclamations.

Associons au modèle de risque considéré les processus stochastiques:

$$\{R_n,n\ge 1\},\quad avec\quad R_n=B_n-cA_n,\quad n\ge 1,$$

$$\{S_n,n\ge 0\},\quad avec\quad S_n=\sum_{k=1}^{n}R_k,\quad n\ge 0,\quad S_0=0,$$

$$\{T_n,n\ge 0\},\quad avec\quad T_n=\sum_{i=1}^{n}A_i,\quad n\ge 0,\quad T_0=0,$$

$$\{M_n,n\ge 0\},\quad avec\quad M_n=\sup\{S_0,S_1,\ldots S_n\}.$$

Une forte interaction existe entre la théorie de risque et celle des files d'attente mais sa contribution dans chaque théorie n'est pas suffisamment claire. Ce parallélisme entre les deux théories, observé par Prabhu en 1961, n'est pas réellement étudié et utilisé. (cf. [3])
Dans l'article de Jacques Janssen "On the interaction between risk and queueing theories" en 1982, on trouve des relations précises sur les contributions et les restrictions de cette interaction avec des exemples sur des équivalences entre des modèles de risque et des systèmes de files d'attente (cf. [3]). On cite aussi le travail de Aïssani et Benouaret, où les auteurs s'intéressent à l'application de la méthode de stabilité forte dans les files d'attente et les modèles de risque afin de clarifier les conditions d'équivalence et de translation de résultats entre la théorie de risque et celle des files d'attente. (cf. [1]).

Méthodologie

Description du système de files d'attente GI/G/1
En utilisant les même notations, Ce modèle peut être décrit par :

$\{A_n,n\ge 1\}$ qui est le processus des inter-arrivées,

caractérisé par la fonction de distribution $A(.)$ avec $\{A(0)<1\}$

$\{B_n,n\ge 1\}$ qui est le processus des durées de service,

caractérisé par la fonction de distribution $B(.)$ avec $\{B(0)<1\}$

Soit $\{N(t),t\ge 0\}$ le processus de comptage relatif au processus $\{A_n\}_n$

Nous associons pour chaque modèle de files d'attente les processus stochastiques suivants:

1). Le processus $\{W_n,n\ge 0\}$ où W_n est le temps d'attente du nème client, qui est le temps d'attente dans le système avant le début de son service.

2). Le processus $\{W(t),t\ge 0\}$ où $W(t)$ est le temps d'attente du dernier client entré dans le système avant ou à l'instant t, alors: $W(t)=W_{N(t)}$.

3). Le processus $\{\eta(t),t\ge 0\}$ où $\eta(t)$ est le temps d'attente virtuel à l'instant t.

$Si\ T_0=0, T_n=\sum_{i=1}^{n}A_i, n\ge 1,$

nous avons les relations suivantes entre les trois types de temps d'attente,

$W_n=\eta(T_n-0),$

$W_t=\eta(T_{N(t)}-0),$

$\eta(t)=\sup\{0,W_{N(t)}+B_{N(t)}-(t-T_{N(t)})\}.$

Dualité entre la théorie de risque et la théorie de files d'attente
Le problème fondamental est de montrer l'équivalence entre un modèle de risque et un système d'attente, d'un point de vue probabiliste.

De la dualité, nous avons donc les résultats suivants: (cf. [3])

$$\mathrm{P}(W_n\le x)=\mathrm{P}(M_n\le x),\qquad (4)$$

et $$\mathrm{P}(W_{N(t)}\le x)=\mathrm{P}(M_{N(t)}\le x).\qquad (5)$$

On obtient

$$\mathrm{P}(W_n\le x)=\phi_n(x),\qquad (6)$$

$$\mathrm{P}(W_{N(t)}\le x)=\phi(x,t),\qquad (7)$$

Les figures suivantes montrent que les trajectoires ont la même structure d'un point de vue géométrique. La relation entre la trajectoire du processus de temps d'attente virtuel $\{\eta(t), t\ge 0\}$ et celle du processus des réserves $\{X(t), t\ge 0\}$ dans la théorie de risque avec c = 1, est intuitivement claire si nous renversons le temps dans la Figure 1. sur [0, T]. Nous obtenons alors la Figure 2. qui est la trajectoire de X(t) sur [0, T]. Le problème fondamental est de montrer que cette technique conduit à une équivalence entre les deux modèles d'un point de vue probabiliste, (cf. [3]).

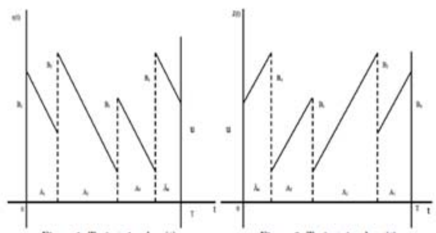
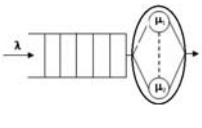


Figure 1. Trajectoire de $\eta(t)$ Figure 2: Trajectoire de $X(t)$

Dans ce qui suit, nous clarifions les conditions de la translation des résultats entre un modèle de risque classique a deux dimensions et un système d'attente avec deux serveurs présenté par la figure suivante:

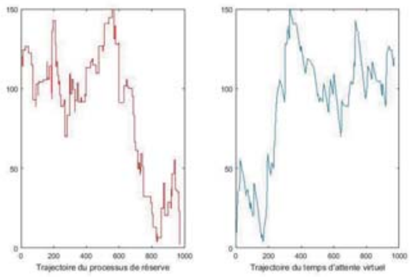


Résultats

Pour vérifier numériquement la dualité qui existe entre le modèle de risque classique bidimensionnel et le système d'attente considéré, d'un point de vue géométrique, nous avons conçu des algorithmes de simulation des modèles considérés sous MATLAB.

On considère que le processus des inter-arrivées des sinistres dans le modèle de risque classique bidimensionnel comme le processus des inter-arrivées dans le système d'attente, le processus des montants de réclamations dans le modèle de risque classique bidimensionnel aussi comme le temps de service dans le système d'attente.

Les résultats numériques obtenus sont illustrés dans la figure suivante:



A partir des deux trajectoires tracées (voir la figure précédente), la dualité entre les deux modèles apparais clairement. En renversant le graphe de la réserve, on obtient une trajectoire du temps d'attente virtuel.

Conclusions

Afin d'illustré la dualité existante entre le modèle de risque classique a deux dimensions et un système d'attente, nous avons conçu des algorithmes de simulation qui renvoient la trajectoire du temps d'attente virtuel et la trajectoire du processus de réserve. Ces deux programme nous ont permit de voir la dualité entre ces deux modèle de pont de vu géométrique.

Il sera intéressant de confirmer cette dualité d'un point de vu probabiliste en calculant et en comparant la distribution du temps d'attente dans le système d'attente considéré et la probabilité de non-ruine dans le modèle de risque classique a deux dimensions.

Références

[1] D. Aïssani and Z. Benouaret. Modèles de Risque et Files 'Attente: La méthode de stabilité forte. Journal Afrika Statistika Vol. 5, N◦ 3, page 210–218, 2010.
[2] S. Asmussen and H. Albrecher. Ruin Probabilities. Word Scientific, 2010.
[3] J. Janssen. On the interaction between risk and queueing theories. Paper presented at the first"Tagung fiber Risikotheorie" at the Mathematics Research Center, Oberwolfach, Octobre 1982.