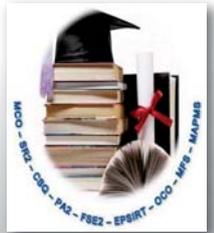




Propagation Analytique de l'incertitude

Épistémique dans les Options Européennes d'Achat F.CHEURFA S.OUAZINE et K.ABBAS

Doctoriales de Recherche Opérationnelle, le 12 et 13 Décembre 2018



Introduction

La théorie des options est devenue l'une des pierres angulaires de la finance moderne. En effet, la notion d'option est apparue à la fin des années 1970, suite aux travaux de Black, Scholes et Merton [1] pour déterminer le prix d'une option par une nouvelle méthode, dite « portefeuille de couverture ». Cette dernière a révolutionné le monde financier et le fonctionnement des marchés des options qui a connu un essor considérable grâce à son introduction. Signe de reconnaissance évidente, leur nouvelle approche, utilisée quotidiennement sur les marchés des options, a valu à Merton et Scholes le prix Nobel de l'économie en 1997.

« Une option est un contrat transférable qui confère à son détenteur le droit d'acheter ou de vendre un élément d'actif spécifique à un prix donné durant une durée précise (option à l'américaine) ou à une date donnée (option à l'europpéenne). »

1. Modèle de Black-Scholes-Merton

Cette formule a été publiée sous le titre « The pricing of options and corporate liabilities » dans le « Journal of Political Economy » de mai-juin 1973. La formule de B&S constitue le début de la finance stochastique qui est le calcul des probabilités appliqué au traitement des données statistiques pour évaluer les instruments financiers.

1.1 Hypothèses du modèle:

- le taux d'intérêt sans risque est constant pendant la durée de vie de l'option,
- les actifs se négocient en continu 24h/24h,
- la volatilité est considérée constante durant la vie de l'option,

On suppose que l'action sous-jacent :

- Est divisible
- Ne distribue pas de dividendes
- Peut être vendue à découvert

1.1.2 Formule de Black-Scholes-Merton

Sous les hypothèses précédentes, le prix de l'option d'achat est donné par l'espérance sous la probabilité risque neutre du Payoff:

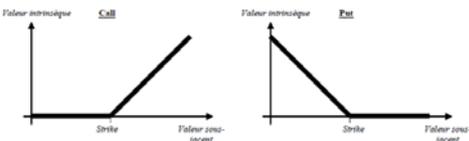
$$C_T = \mathbb{E}(\max(S_T - K, 0)e^{-rT})$$

$$C_T = S_0 \mathcal{N}(d_1) - Ke^{-rT} \mathcal{N}(d_2)$$

où $\mathcal{N}(\cdot)$: La fonction de répartition de la loi normale permettant de prendre en compte l'évolution aléatoire des cours future du sous-jacent.

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + [r + \frac{\sigma^2}{2}]T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + [r - \frac{\sigma^2}{2}]T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$



■ Option « Dans la monnaie » - « Hors de la monnaie » - « À la monnaie »

Méthodologie

2. Analyse de l'incertitude épistémique du modèle de Black-Scholes-Merton

Dans ce travail, nous considérons l'analyse épistémique du modèle Black-Scholes-Merton, où nous étudierons le fait qu'on suppose que les deux paramètres le taux d'intérêt et la volatilité intervenant dans la définition du modèle sont des variables aléatoires, et ce afin de modéliser l'incertitude imposée sur la détermination de ces paramètres. Dans ce cas, afin d'évaluer le prix de l'option européenne d'achat selon le modèle considéré, nous utiliserons deux approches, simulation et Taylor séries expansion

2.1 Nouveau modèle:

D'après la formule de Black-Scholes-Merton cinq paramètres suffisent pour déterminer la valeur d'une option, trois d'entre eux sont directement contrôlables, à savoir le prix du sous-jacent S_t , le prix d'exercice K , et la durée de vie T . Cependant, les deux paramètres, le taux d'intérêt r et la volatilité σ , sont des paramètres incontrôlables.

Dans notre analyse, Deux modèles sont introduits pour décrire ces paramètres:

$$r = \bar{r} + \sigma_r \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 \rightarrow \mathcal{N}(0,1); \quad (1)$$

$$\sigma = \bar{\sigma} + \sigma_\sigma \varepsilon_2, \quad \varepsilon_2 \rightarrow \mathcal{N}(0,1); \quad (2)$$

Les deux bruits sont appelés bruits exogènes et suivent la distribution normale centrée et réduite.

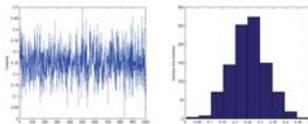


Figure 1: Graphe et histogramme du modèle (1) avec $\bar{r} = 0.1$ et $\sigma_r = 0.02$.

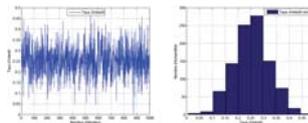


Figure 2: Graphe et histogramme du modèle (2) avec $\bar{\sigma} = 0.25$ et $\sigma_\sigma = 0.07$.

La formule de Black-Scholes-Merton pour l'option d'achat européenne peuvent être résolue maintenant par rapport aux modèles stochastiques (1) et (2),

$$C_T(\bar{r} + \sigma_r \varepsilon_1, \bar{\sigma} + \sigma_\sigma \varepsilon_2) = S_0 \mathcal{N}(d_1) - Ke^{-rT} \mathcal{N}(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + [(\bar{r} + \sigma_r \varepsilon_1) + \frac{(\bar{\sigma} + \sigma_\sigma \varepsilon_2)^2}{2}]T}{(\bar{\sigma} + \sigma_\sigma \varepsilon_2)\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + [(\bar{r} + \sigma_r \varepsilon_1) - \frac{(\bar{\sigma} + \sigma_\sigma \varepsilon_2)^2}{2}]T}{(\bar{\sigma} + \sigma_\sigma \varepsilon_2)\sqrt{T}} = d_1 - (\bar{\sigma} + \sigma_\sigma \varepsilon_2)\sqrt{T}$$

2. Simulation du prix de l'option européenne d'achat

2.1 Les étapes de la simulation

- Entrées: $-S_0, K, T, \bar{r}, \bar{\sigma}, \sigma_r, \sigma_\sigma, \rho$
- Génération de deux variables aléatoires normales indépendantes $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow \mathcal{N}(0,1)$
- Calcul du taux d'intérêt sans risque r et de la volatilité σ avec: $r = \bar{r} + \varepsilon_1 \sigma_r$ et $\sigma = \bar{\sigma} + (\rho \varepsilon_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \varepsilon_2) \sigma_\sigma$, tel que pour $\rho = 0$, on est dans le cas indépendant. Calcul de d_1, d_2 et C_T par les formules (4), (5) et (3) respectivement.

Sorties: La Moyenne et la variance des prix d'options simulés.

Résultats

3.1 Prix de l'option européenne d'achat sous l'incertitude paramétrique:

Dans cette section, nous utiliserons la formule de développements en séries de Taylor afin d'évaluer le prix d'une option européenne d'achat sous les nouvelles hypothèses introduites en (1) et (2).

$$C_T(r, \sigma) = C_T(\bar{r}, \bar{\sigma}) + \frac{\partial C_T}{\partial r}(\bar{r}, \bar{\sigma})(\sigma_r \varepsilon_1) + \frac{\partial C_T}{\partial \sigma}(\bar{r}, \bar{\sigma})(\sigma_\sigma \varepsilon_2) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 C_T}{\partial r^2}(\bar{r}, \bar{\sigma})(\sigma_r \varepsilon_1)^2 + 2 \frac{\partial^2 C_T}{\partial r \partial \sigma}(\bar{r}, \bar{\sigma})(\sigma_r \varepsilon_1 \sigma_\sigma \varepsilon_2) + \frac{\partial^2 C_T}{\partial \sigma^2}(\bar{r}, \bar{\sigma})(\sigma_\sigma \varepsilon_2)^2 \right] + \frac{1}{6} \left[\frac{\partial^3 C_T}{\partial r^3}(\bar{r}, \bar{\sigma})(\sigma_r \varepsilon_1)^3 + 3 \frac{\partial^3 C_T}{\partial r^2 \partial \sigma}(\bar{r}, \bar{\sigma})(\sigma_r \varepsilon_1)^2 \sigma_\sigma \varepsilon_2 + 3 \frac{\partial^3 C_T}{\partial r \partial \sigma^2}(\bar{r}, \bar{\sigma})(\sigma_r \varepsilon_1 \sigma_\sigma \varepsilon_2)^2 + R_3(\sigma_r, \sigma_\sigma, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \right]$$

3.2 Calcul de la moyenne

Cas 1: lorsque les bruits exogènes ε_1 et ε_2 sont indépendants. Pour ce cas, la formule ci-dessus se simplifie sous la forme suivante :

$$\mathbb{E}(C_T) = C_T(\bar{r}, \bar{\sigma}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_T}{\partial r^2}(\bar{r}, \bar{\sigma}) \sigma_r^2 \mathbb{E}(\varepsilon_1^2) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_T}{\partial \sigma^2}(\bar{r}, \bar{\sigma}) \sigma_\sigma^2 \mathbb{E}(\varepsilon_2^2)$$

$$= C_T(\bar{r}, \bar{\sigma}) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 C_T}{\partial r^2}(\bar{r}, \bar{\sigma}) \sigma_r^2 + \frac{\partial^2 C_T}{\partial \sigma^2}(\bar{r}, \bar{\sigma}) \sigma_\sigma^2 \right]$$

Cas 2: lorsque les bruits exogènes ε_1 et ε_2 sont dépendants. Le calcul précédent de la moyenne de C_T deviendra :

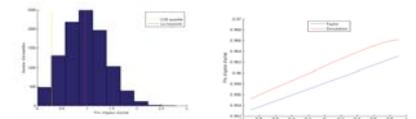
$$\mathbb{E}(C_T) = C_T(\bar{r}, \bar{\sigma}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_T}{\partial r^2}(\bar{r}, \bar{\sigma}) \sigma_r^2 \mathbb{E}(\varepsilon_1^2) + \frac{\partial^2 C_T}{\partial r \partial \sigma}(\bar{r}, \bar{\sigma}) \sigma_r \sigma_\sigma \mathbb{E}(\varepsilon_1 \varepsilon_2) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_T}{\partial \sigma^2}(\bar{r}, \bar{\sigma}) \sigma_\sigma^2 \mathbb{E}(\varepsilon_2^2) + 3 \frac{\partial^3 C_T}{\partial r^2 \partial \sigma}(\bar{r}, \bar{\sigma}) \sigma_r^2 \sigma_\sigma \mathbb{E}(\varepsilon_1^2 \varepsilon_2) + 3 \frac{\partial^3 C_T}{\partial r \partial \sigma^2}(\bar{r}, \bar{\sigma}) \sigma_r \sigma_\sigma^2 \mathbb{E}(\varepsilon_1 \varepsilon_2^2)$$

3.3 Résultats numériques: Lors du calcul de la moyenne et la variance sous l'environnement Matlab avec $S_0 = 20.56$, $K = 23$, $T = 0.5$, $\bar{r} = 0.1$, $\bar{\sigma} = 0.25$, $\sigma_r = 0.02$ et $\sigma_\sigma = 0.07$. Nous avons obtenu les résultats numériques dressés dans les tableaux suivants:

ρ	-0.9	-0.5	-0.3	0	0.3	0.5	0.9
La moyenne	0.9532	0.9554	0.9565	0.9581	0.9598	0.9609	0.9631
La variance	0.1083	0.1301	0.1408	0.1567	0.1724	0.1827	0.2029

ρ	Simulation	Black-Scholes-Merton	Développement de Taylor	0.05-quantile	L'asymétrie
-0.9	0.9562	0.9505	0.9532	0.4243	0.0418
-0.3	0.9593	0.9505	0.9565	0.3339	0.1179
.5	0.9645	0.9505	0.9609	0.2880	0.2132
.9	0.9662	0.9505	0.9631	0.2481	0.2708

Analyse comparative



Conclusions

L'objectif fondamental de la présente étude est d'examiner et montrer la manière de propager l'incertitude épistémique de certains paramètres, impliqués dans la définition du modèle de Black-Scholes-Merton à savoir le taux d'intérêt sans risque et la volatilité, à l'aide de la méthode analytique basée sur le développement en série de Taylor. Une discussion sur la corrélation entre les paramètres a été également abordée. En outre, une validation des résultats obtenus a été considérée en comparant ces résultats avec ceux obtenus par la simulation.

Références

1. Black, F. et Scholes, M. (1973). The pricing of option and corporate liabilities. Journal of Political Economy, 81 : 36-7
2. Idie, J. Jarde, C. LeFol, G. Monfort, A. et Pegoraro, F. (2008). Taking into account extreme events in european option pricing. Financial Stability Review, 12 : 39-51.
3. Baranger, C. et Mathiaud, J. Méthode de Monte-Carlo, 2012.
4. Giordan, P. Options et volatilité. Rapport Technique, Paris Dauphine, 2013.