Estimation à noyaux associés discrets dans les modèles de stock du type *(R,s,S)*

Faïrouz AFROUN, Djamil AÏSSANI et Djamel HAMADOUCHE

Doctoriales de Recherche Opérationnelle, le 12 et 13 Décembre 2018

Introduction

L'exploitation de la méthode du noyau dans les chaînes de Markov dans un cadre pratique revient initialement au travail de Bareche et Aïssani (2008) [1], où les auteurs ont prouvé l'applicabilité de la méthode du noyau dans les systèmes de files d'attente classiques lorsque l'une des lois les régissant est générale et inconnue. Par la suite, Gontijo et al. (2011) [3], ont appliqué la méthode de noyau pour estimer les mesures de performance du système $GI^{[X]}/M/C/N$. Récemment, Cherfaoui et al. (2015) [2] ont abordé le problème du choix du paramètre de lissage dans le contexte d'estimation à noyau d'une chaîne de Markov décrivant un système d'attente. Dans ce dernier travail, afin de prendre en considération l'interaction des différentes composantes d'un système d'attente, les auteurs ont proposé une procédure de sélection du paramètre de lissage qui se base sur les normes matricielles où ils ont démontré que l'estimateur du paramètre de lissage choisi, par la minimisation d'une certaine norme matricielle, donne de meilleurs résultats que les méthodes classiques.

Notons que dans la totalité des travaux cités auparavant les auteurs ont appliqué l'estimation à noyau dans les chaîne de Markov discrète à temps continu ce qui justifier l'utilisation des noyaux associés continue (pour estimer des densités définies sur $\boldsymbol{R}_+$). Dans ce travail, nous proposons de considérer une chaîne de Markov discrète à temps discret où notre objectif est d'analyser le problème du choix du paramètre de lissage d'un estimateur à noyau associé discret d'une matrice de transition correspondante au modèle de stock de type *(R,s,S)* [4].

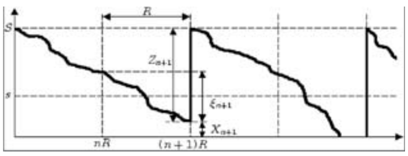

Figure 1 : Le niveau du stock dans le système *(R, s, S)* avec un délai d'exécution nul

Estimateur à noyau d'une densité discrète

Définition : Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un n-échantillon *i.i.d* issu d'une variable aléatoire X de la fonction de masse de probabilité inconnue f sur M. L'estimateur à noyau associé discret de *f* est défini par :

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_{(x,h)}\,(X_i),$$

où h est le paramètre de lissage (fenêtre) et $K_{x,h}$ est le noyau associé discret dépendant de x et h support $M_{x,h} = M_x$ (ne dépend pas de h).

Choix du noyau:

Poissonnien :

$$K_{p_{0(x+h)}}(y) = \frac{(x+h)^y}{y!}e^{-(x+h)},$$

Binomial :

$$K_{B\left(x+1,\frac{x+h}{x+1}\right)}(y) = \frac{(x+1)\,!}{y\,!\,(x+1-y)\,!}\left(\frac{x+h}{x+1}\right)^y\left(\frac{1-h}{1+x}\right)^{x+1-y} 1_{\{y\le x+1\}},$$

Binomiale négatif :

$$K_{BN_{\left(x+1,\frac{x+1}{2x+1+h}\right)}}(y) = \frac{(x+y)\,!}{y\,!\,x\,!}\left(\frac{x+h}{2x+1+h}\right)^y\left(\frac{x+1}{2x+1+h}\right)^{x+1},$$

Triangulaire :

$$K_{(T_{(a,h,x)})}(y) = \frac{(a+1)^h - |\,y-x|^h}{(2a+1)(a+1)^h - 2\left(\sum_{j=0}^{a} j^h\right)}\ \mathbf{1}_{\{|y-x|<a\}},$$

Méthodes classiques de Sélection de paramètre de lissage:

- Choix optimal: Minimisation du *MISE* ou du *ISE*
- Validation croisée: *UCV, BCV, LCV*,…
- Excès des zéros.

Méthodologie

Rappelons que les éléments de la matrice des probabilités de transition de la chaîne de Markov décrivant le modèle *(R,s,S)* sont donnés par :

$$P_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=S}^{+\infty} a_k & Si\ 0 \le i \le s\ \ et\ j = 0\,, \\ \sum_{k=i}^{+\infty} a_k & Si\ s+1 \le i \le\ S\ \ et\ j = 0, \\ a_{S-i} & Si\ 0\ \le i\ \le s\ \ et\ 0 \le\ j \le s, \\ a_{i-j} & Si\ s+1\ \le i\ \le S\ \ et\ 1 \le\ j \le i, \\ 0 & Si\ \ s+1\ \le i\ \le S\ \ et\ j \ge i+1. \end{cases}$$

où $a_k = f(k) = \ Pr(X = k)$ avec $k \in N$ et X représente la demande.

Supposons que nous ne disposons que d'un n-échantillon du niveau du stock, alors on est contraint à estimer la matrice de transition *P*.

Ici, nous proposons d'utiliser la méthode du noyau associé discret pour estimer la matrice *P*. Pour le choix du noyau *K*, le problème a priori est facile. Il suffit d'utiliser, par exemple, le noyau: Poissonnien, Binomial, Binomiale négatif ou Triangulaire. Tandis que pour le choix du paramètre de lissage *h*, on peut envisager deux manières :

1. Estimation des éléments $a_k = Pr(X = k)$ indépendament de leurs position dans la matrice *P* ce qui nous ramène à l'estimation classique d'une densité discrète par la méthode du noyau i.e. les $\hat{a}_k$ sont définis par :

$$\hat{a}_k = \hat{P}(X = k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_{(x,h)}\,(X_i)\,, \qquad et\ k \in N$$

et le choix de paramètre du lissage, dans ce cas, se fait par le biais de l'une des techniques classiques précédentes.

2. Prendre en considération le nombre de réplications des éléments a_k dans la matrice *P*. L'estimateur de la matrice de transition de la chaîne de Markov *X* sera présenté comme suit:

$$\hat{P} = \begin{array}{c|cccc|cccc} & 0 & 1 & \cdots & s & S+1 & S+2 & \cdots & S \\ \hline 0 & \sum_{S}^{+\infty}\hat{a}_k & \hat{a}_{S-1} & \cdots & \hat{a}_{S-s} & \hat{a}_{S-s-1} & \hat{a}_{S-s-2} & \cdots & \hat{a}_0 \\ 1 & \sum_{S}^{+\infty}\hat{a}_k & \hat{a}_{S-1} & \cdots & \hat{a}_{S-s} & \hat{a}_{S-s-1} & \hat{a}_{S-s-2} & \cdots & \hat{a}_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s & \sum_{S}^{+\infty}\hat{a}_k & \hat{a}_{S-1} & \cdots & \hat{a}_{S-s} & \hat{a}_{S-s-1} & \hat{a}_{S-s-2} & \cdots & \hat{a}_0 \\ \hline s+1 & \sum_{s+1}^{+\infty}\hat{a}_k & \hat{a}_s & \cdots & \hat{a}_1 & \hat{a}_0 & 0 & \cdots & 0 \\ s+2 & \sum_{s+2}^{+\infty}\hat{a}_k & \hat{a}_{s+1} & \cdots & \hat{a}_2 & \hat{a}_1 & \hat{a}_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S & \sum_{S}^{+\infty}\hat{a}_k & \hat{a}_{S-1} & \cdots & \hat{a}_{S-s} & \hat{a}_{S-s-1} & \hat{a}_{S-s-2} & \cdots & \hat{a}_0 \end{array}$$

Pour le choix de la fenêtre *h* et afin de répondre à notre objectif nous proposons d'utiliser les normes matricielles. Dans ce cas le paramètre de lissage peut être choisi selon l'une les trois expressions suivantes :

$$\boldsymbol{h_1^*} = \arg\min_h \|P - P\|_1 = \arg\min_h \left[\sup_{s+1\le i\le S}\left(\sum_{k=0}^{i-1}|\ \hat{a}_k - a_k\,| + \left|\sum_{k=0}^{i-1}(\hat{a}_k - a_k)\right|\right)\right].$$

$$\boldsymbol{h_2^*} = \arg\min_h \|P - P\|_2 = \arg\min_h \left[(S+1)\left(\sum_{k=0}^{S}(\hat{a}_k - a_k)^2\right)\right.$$
$$\left. + \sum_{k=s+1}^{S-1}(S+s+1-k)(\hat{a}_k - a_k)^2 + (s+2)\left(\sum_{k=0}^{S-1}(\hat{a}_k - a_k)\right)^2 + \sum_{i=s+1}^{S-1}\left(\sum_{k=0}^{i-1}(\hat{a}_k - a_k)\right)^2\right].$$

$$\boldsymbol{h_3^*} = \arg\min_h \|P - P\|_\infty$$
$$= \arg\min_h \left[\sup_{0\le j\le S}\left(\begin{array}{l} \left[(s+2)\left|\sum_{k=0}^{S-1}(\hat{a}_k - a_k)\right| + \sum_{i=s+1}^{S-1}\left|\sum_{k=0}^{i-1}(\hat{a}_k - a_k)\right|\right]\mathbf{1}_{\{j=0\}} \\ + \left[(s+2)\left|(\hat{a}_{S-j} - a_{S-j})\right| + \sum_{i=s+1}^{S-1}\left|(\hat{a}_{i-j} - a_{i-j})\right|\right]\mathbf{1}_{\{1\le j\le s\}} \\ + \left[(s+2)\left|(\hat{a}_{S-j} - a_{S-j})\right| + \sum_{i=j}^{S-1}\left|(\hat{a}_{i-j} - a_{i-j})\right|\right]\mathbf{1}_{\{s+1\le j\le S-1\}} \end{array}\right)\right]$$

Résultats

Afin d'analyser numériquement l'impact du choix du paramètre de lissage sur les performances de l'estimateur à noyau de la matrice *P*, nous avons implémenté un programme sous MATLAB dont les principales étapes sont comme suit :

1. Fixer la totalité des paramètres du modèle : *R, s, S, λ, f*,...
2. Générer 1000 échantillons de taille *n* de distribution *f*
3. Estimer *h* par les méthodes classiques et les normes matricielle.
4. Calculer $\hat{P}$ pour chaque *h* obtenus dans l'étape 3.
5. Calculer les estimateurs moyens de *h*, de $\hat{P}$ et déduire $\hat{Q}$.

Les tables 1 et 2 est un échantillon des résultats obtenus dans notre application numériques lorsque on fixe : *f* à une loi de Poisson de paramètre λavecλ=1 et *R=1,s=5* et *S=20.*

Noyau	n	Méthodes classiques		Normes matricielles		
		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Poisson	50	2.6491	0.4612	0.5011	0.4540	0.3984
	100	2.6753	0.4534	0.4994	0.4461	0.3999
	500	2.7072	0.4487	0.4994	0.4414	0.4014
	1000	2.7102	0.4479	0.4993	0.4406	0.4013
Binomiale Négatif	50	0.6775	0.9059	0.9998	0.8785	0.8286
	100	0.6605	0.9041	0.9998	0.8770	0.8302
	500	0.6459	0.9017	0.9998	0.8746	0.8306
	1000	0.6402	0.9015	0.9998	0.8745	0.8310

Table1 : Estimation de paramètre de lissage *h.*

Noyau	n	Méthodes classiques		Normes matricielles			$\hat{Q}$ exacte
		$\hat{Q}$	$\hat{Q}$	$\hat{Q}$	$\hat{Q}$	$\hat{Q}$	
Poisson	50	6.6204	11.9780	12.0275	11.9698	11.9031	12.2312
	100	6.3430	11.9760	12.0310	11.9673	11.9095	
	500	6.2320	11.9696	12.0278	11.9607	11.9104	
	1000	6.3333	11.9676	12.0259	11.9587	11.9093	
Binomiale Négatif	50	–	11.7499	11.7582	11.7451	11.7330	
	100	11.5981	11.7543	11.7627	11.7491	11.7370	
	500	11.6395	11.7546	11.7623	11.7492	11.7375	
	1000	11.6417	11.7559	11.7637	11.7504	11.7387	

Table2 : Estimation du niveau moyen du stock.

Les résultats obtenus montrent que : à l'exception de la méthode d'Excès des zéros, le reste des techniques fournies des résultats raisonnables et satisfaisants. De plus, d'une manière générale les meilleurs résultats correspondants à ceux conçu à base des paramètres de lissage optimaux au sens d'erreurs (normes) matricielles.

Conclusion

Dans ce travail nous avons considéré le choix du paramètre de lissage par des procédures qui se basent sur des normes matricielles dans le cadre d'estimation à noyaux associés d'une matrice de transition d'une chaîne de Markov discrète à temps discret, décrivant un modèle de stock de type *(R,s,S)*. Quoique ces procédures nous fournies de bon résultats, elles sont restreintes dans un aspect théorique seulement. Pour cela, nous envisageons de développer ces procédures de telle sorte qu'elles soient exploitables en pratique et cela en utilisant par exemple la règle de référence, validation croisée,…

Références

[1] Bareche, A. Aïssani, D. (2008). Kernel density in the study of the strong stability of the M/M/1 queueing system. Operations Research Letters, 36, 535--538.

[2] M. Cherfaoui, M. Boualem, D. Aïssani, and S. Adjabi. (2015) Choix du paramètre de lissage dans l'estimation à noyau d'une matrice de transition d'un processus semi-markovien. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 353(3):273–277.

[3] Gontijo, G. M. Atuncar, G. S. Cruz, F. R. B. Kerbache, L. (2011). Performance evaluation and dimensioning of $GI^{[X]}$/M/c/Nsystems through kernel estimation. Mathematical Problems in Engineering, (Article ID 10.1155/2011/348262):1-20, 2011.

[4] Rabta, B., Aïssani, D. (2005). Strong stability in an *(R, s, S)* inventory model. International Journal of Production Economics, 97(2), 159-171.