Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 15, 2016, pp. 31 - 33

7

Inférence statistique sans contrainte de stabilité pour des modèles à volatilité linéaire des paramètres

N. TOUCHE

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes (LAMOS)
Université de Béjaïa, Béjaïa 06000, Algérie
Tél. (213) 34 81 37 08

Résumé Nous établissons la consistance et la normalit é asymptotique de l'estimateur des moindres carrés pondérés en deux étapes ($2SWLSE$) d'un processus $ARCH(q)$ à seuil en puissance et ce indépendamment de l'hypothèse de stationnarité. Pour des modèles à innovation à queues lourdes, le $2SWLSE$ s'avère plus asymptotiquement efficace que l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance correspondant. une application aux tests de stationnarité stricte et d'asymétrie est considérée, notamment sur des sé ries réelles.

Mots-clés. $ARCH$ à seuil en puissance, stationnarité stricte et non-stationnarité, moindres carrés pondérés, quasi-maximum de vraisemblance, distribution à queues lourdes, test de stationnarité stricte.

7.1 Introduction

Le modèle $ARCH$ à seuil en puissance (δ-$TARCH$) proposé par Hwang et Kim (2004) a connu un intérêt particulier cette dernière décennie en raison de son aptitude à représenter adéquatement certains traits de séries financières, notamment l'effet de levier, l'effet de Taylor, la persistance dans la volatilité et les distributions marginales à queues lourdes. Sous la condition de stationnarité stricte, Pan et *al* (2008) ont établi consistance et normalité asymptotique (CAN) de l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance ($QMLE$) du modèle δ-$TGARCH$, extension $GARCH$ du modèle δ-$TARCH$. Hamadeh et Zakoaïn (2011) ont obtenu le même résultat sous des hypothèses plus faibles, mais en imposant toujours la stationnarité stricte. En outre, Hamadeh et Zakoaïn (2011) ont obtenu la propriété CAN pour deux variantes de l'estimateur des moindres carrés ordinaire (LS) d'un modèle δ-$TARCH$ sous l'hypothèse d'existence du $2\delta^{\grave{e}me}$ moment du processus observé. Plus récemment, Francq et Zakoïan (2013) ont étendu la théorie du $QMLE$ pour le modèle δ-$TGARCH$ même dans le domaine de non stationnarité.

Bien que le $QMLE$ possède de bonnes propriétés statistiques, il présente toutefois quelques inconvénients qui s'accentuent particulièrement pour des innovations à queues lourdes. En particulier, le $QMLE$ n'est pas convergent pour des innovations à variance infinie et présente de mauvaises performances pour de petites puissances δ (Hamadeh et Zakoaïn, 2011). Pour y remédier, nous proposons dans ce travail un estimateur des moindres carrés pondérés en deux étapes ($2SWLSE$) pour le modèle δ-$TARCH(q)$. La pondération est le carré inversé de la variance conditionnelle du processus, arbitrairement évaluée dans la première étape et estimée dans la seconde. Outre sa simplicité, l'estimateur $2SWLSE$ s'avère consistant et asymptotiquement Gaussien sous des hypothèses très faibles, en particulier sans aucune contrainte sur les moments du processus observé et même sans imposer l'hypothèse de stationnarité stricte. De surcroit, nous montrons que les variances asymptotiques de $2SWLSE$ et $QMLE$ sont proportionnelles et même égales lorsque $\delta = 2$. En particulier, le $2WLSE$ en est plus asymptotiquement efficace pour des innovations dont la distribution est à queues lourdes et peut converger même pour des innovations à variance infinie. Nous montrons également que le $2SWLSE$ est plus efficace que l'estimateur des moindres carrés ordinaire LS. Une application de la théorie $2WLSE$ aux tests de stationnarité stricte et d'asymétrie du modèle δ-$TARCH$ est proposée. Enfin, la théorie est confirmée en échantillons finis à travers des séries simulées et réelles.

7.2 Présentation du modèle δ-$TARCH\ (q)$

Considérons un processus δ-$TARCH\ (q)$, $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{N}\}$, donné par l'équation stochastique suivante :

$$\begin{cases} \varepsilon_t = h_t^{\frac{1}{\delta}}(\theta)\,\eta_t \\ h_t(\theta) = \omega + \sum_{j=1}^{q} \alpha_{+,j}(\varepsilon_{t-j}^{+})^{\delta} + \alpha_{-,j}(\varepsilon_{t-j}^{-})^{\delta} \end{cases}, \quad t \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, ...\}, \tag{2.1}$$

où $q \in \mathbb{N}^*$, δ est une constante positive connue, $\varepsilon_0 = h_0^{\frac{1}{\delta}} \eta_0$ pour une certaine variable aléatoire non négative h_0, $x^+ = \max(x, 0)$, $x^- = -\min(x, 0)$ et

$$\begin{array}{c}\{\eta_t, t \in \mathbb{N}\} \text{ est un processus indépendant et identiquement distribué } (iid) \text{ avec} \\ E(\eta_1) = 0,\, E\left(|\eta_1|^\delta\right) = 1,\, P(|\eta_1|^\delta = 1) < 1.\end{array} \tag{bfA1}$$

Le vecteur des paramètres $\theta = (\omega, \alpha_{+,1}, \alpha_{-,1}, ..., \alpha_{+,q}, \alpha_{-,q})' \in \Theta \subset \mathbb{R}^{2q+1}$ est tel que $\omega > 0$, $\alpha_{+,j} \geq 0$, $\alpha_{-,j} \geq 0$, $(1 \leq j \leq q)$. Pour le cas spécial $q = 1$ que nous considérerons en particulier dans le cas de non stationnarité, le paramètre θ est simplement écrit $\theta = (\omega, \beta')'$ avec $\beta = (\alpha_+, \alpha_-)'$. Soit $u_t = |\varepsilon_t|^\delta - h_t(\theta) = h_t(\theta)(|\eta_t|^\delta - 1)$ et $\mathcal{Y}_{t-1} = (1, (\varepsilon_{t-1}^+)^\delta, (\varepsilon_{t-1}^-)^\delta, ..., (\varepsilon_{t-q}^+)^\delta, (\varepsilon_{t-q}^-)^\delta)'$, où l'on peut remarquer que $h_t(\theta) = \theta' \mathcal{Y}_{t-1}$. Alors, le modèle (2.1) peut être écrit sous la forme d'autorégression suivante :

$$|\varepsilon_t|^\delta = \mathcal{Y}_{t-1}' \theta + u_t \qquad t \in \mathbb{N}^*, \tag{2.2}$$

laquelle est régie par la différence de martingale, $\{u_t, t \in \mathbb{N}\}$, associée à $\{_t, t \in \mathbb{N}\}$, avec $E(u_t/_{t-1}) = 0$ et $Var\,(u_t/_{t-1}) = (\mathcal{Y}_{t-1}'\theta)^2 Var(|\eta_t|^\delta)$. Soit γ l'exposant de Lyapunov associé au modèle (2.1) (voir, Pan et *al*, 2008 ; Hamadeh et Zakoïan, 2011 ; Gonçalves et Mendes-Lopes, 2012 pour l'expression de γ). Une condition nécessaire et suffisante pour que le modèle (2.1) soit stable est que $\gamma < 0$. Dans le cas contraire le modèle est dit instable, auquel cas $|\varepsilon_t|^\delta$ diverge (presque sûrement quand $\gamma > 0$ et en probabilité quand $\gamma = 0$) vers l'infini quand $t \to \infty$ (voir aussi Francq et Zakoïan, 2013).

7.3 Principaux résultats

Pour une série $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ générée à partir de (2.1), nous proposons pour θ un estimateur des moindres carrés pondérés en deux étapes, $(\widehat{\theta}_{1WLS}, \widehat{\theta}_{2WLS})$, donné conditionnellement à ε_0 par

$$i)\ \widehat{\theta}_{1WLS} = \left(\sum_{t=1}^n \frac{\mathcal{Y}_{t-1}\mathcal{Y}_{t-1}'}{h_t^2(\widetilde{\theta})}\right)^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{\mathcal{Y}_{t-1}|\varepsilon_t|^\delta}{h_t^2(\widetilde{\theta})},\ ii)\ \widehat{\theta}_{2WLS} = \left(\sum_{t=1}^n \frac{\mathcal{Y}_{t-1}\mathcal{Y}_{t-1}'}{h_t^2(\widehat{\theta}_{1WLS})}\right)^{-1} \sum_{t=1}^n \frac{\mathcal{Y}_{t-1}|\varepsilon_t|^\delta}{h_t^2(\widehat{\theta}_{1WLS})}, \tag{3.1}$$

où $\widetilde{\theta} = (\widetilde{\omega}, \widetilde{\alpha}_{+,1}, \widetilde{\alpha}_{-,1}, ..., \widetilde{\alpha}_{+,q}, \widetilde{\alpha}_{-,q})' = (\widetilde{\omega}, \widetilde{\beta}')'$ est un vecteur de constantes positives connues. Un estimateur similaire a été étudié par Aknouche (2012) dans le cadre d'un modèle $ARCH(1)$ correspondant à $q = 1$, $\delta = 2$ et $\alpha_{+,1} = \alpha_{-,1}$. Posons

$$H(\widetilde{\theta}, \theta) = E_\infty\left(\frac{1}{h_t^2(\widetilde{\theta})}\mathcal{Y}_{t-1}\mathcal{Y}_{t-1}'\right),\ \Gamma(\widetilde{\theta}, \theta) = E_\infty\left(\frac{h_t^2(\theta)}{h_t^4(\widetilde{\theta})}\mathcal{Y}_{t-1}\mathcal{Y}_{t-1}'\right), \Pi(\theta) = E_\infty\left(\frac{1}{h_t^2(\theta)}\mathcal{Y}_{t-1}\mathcal{Y}_{t-1}'\right), \tag{3.2}$$

et lorsque $q = 1$,

$$\begin{array}{c}\zeta_{t-1} = \left((\eta_{t-1}^+)^\delta, (\eta_{t-1}^-)^\delta\right)',\ \Delta(\widetilde{\beta}, \beta) = E\left(\frac{1}{(\zeta_{t-1}\widetilde{\beta})^2}\zeta_{t-1}\zeta_{t-1}'\right), \\ \Omega(\widetilde{\beta}, \beta) = E\left(\frac{(\zeta_{t-1}\beta)^2}{(\zeta_{t-1}\widetilde{\beta})^4}\zeta_{t-1}\zeta_{t-1}'\right), \Sigma(\beta) = E\left(\frac{1}{(\zeta_{t-1}\beta)^2}\zeta_{t-1}\zeta_{t-1}'\right),\end{array} \tag{3.3}$$

où pour un processus asymptotiquement $\{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ stationnaire la notation $E_\infty(X_t) = \lim_{t\to\infty} E(X_t)$ est utilisée. Le résultat suivant donne les propriétés asymptotiques des estimateurs $\widehat{\theta}_{1WLS}$ et $\widehat{\theta}_{2WLS}$ aussi bien dans la région de stabilité que dans la région d'instabilité. Pour cela nous avons besoin de l'hypothèse suivante proposée par Francq et Zakoïan (2$E\left((1 + X_1 + ... + X_1...X_{t-1})^{-1}\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ quand $t \to \infty$, avec $X_t = \alpha_+(\eta_t^+)^\delta + \alpha_-(\eta_t^-)^\delta$.(7.1)013) :

Théorème *i) Cas de stabilité (avec $q \in \mathbb{N}^*$) :*
*Sous **(A1)** et $\gamma < 0$,*

$$\widehat{\theta}_{1WLS} \underset{n\to\infty}{\overset{p.s.}{\to}} \theta, \quad et \quad \widehat{\theta}_{2WLS} \underset{n\to\infty}{\overset{p.s.}{\to}} \theta. \tag{3.4}$$

Si de plus $E\left(|\eta_1|^{2\delta}\right) < \infty$ alors,

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_{1WLS} - \theta) \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} N\left(0, Var\left(|\eta_1|^\delta\right) H^{-1}(\widetilde{\theta}, \theta)\Gamma(\widetilde{\theta}, \theta)H^{-1}(\widetilde{\theta}, \theta)\right).3.5 \tag{7.2}$$

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_{2WLS} - \theta) \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}} N\left(0, Var\left(|\eta_1|^\delta\right) \Pi^{-1}(\theta)\right).3.6 \tag{7.3}$$

*ii) Cas d'instabilité stricte (avec $q = 1$) : Sous $\gamma > 0$, **(A1)**, la compacité de Θ, $E\left(\left|\log\left(|\eta_1|^\delta\right)\right|\right) < \infty$, et $P(\eta_1 = 0) = 0$,*

$$a)\ \widehat{\beta}_{1WLS} \underset{n\to\infty}{\overset{p.s.}{\to}} \beta, \quad et\ \ b)\ \widehat{\beta}_{2WLS} \underset{n\to\infty}{\overset{p.s.}{\to}} \beta, \tag{3.7}$$

où $\widehat{\beta}_{1WLS}$ et $\widehat{\beta}_{2WLS}$ sont les composantes de $\widehat{\theta}_{1WLS}$ et $\widehat{\theta}_{2WLS}$ respectivement correspondant à $\beta = (\alpha_+, \alpha_-)'$. Si de plus $E(|\eta_1|^{2\delta}) < \infty$ alors,

$$\sqrt{n}(\widehat{\beta}_{1WLS}-\beta)\underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}}N\left(0,Var\left(|\eta_1|^{\delta}\right)\Delta^{-1}(\widetilde{\beta},\beta)\Omega\,(\widetilde{\beta},\beta)\Delta^{-1}(\widetilde{\beta},\beta)\right).3.8 \tag{7.4}$$

$$\sqrt{n}(\widehat{\beta}_{2WLS}-\beta)\underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\to}}N\left(0,Var\left(|\eta_1|^{\delta}\right)\Sigma^{-1}(\beta)\right).3.9 \tag{7.5}$$

*iii) Cas d'instabilité (avec $q=1$) : Sous (**A1**), $\gamma=0$, $E\left(\left|\log(|\eta_1|^{\delta}\right|)\right)<\infty$, la compacité de Θ et $P(\eta_1=0)=0$,*

$$a)\ \widehat{\beta}_{1WLS}\underset{n\to\infty}{\overset{p}{\to}}\beta,\ \ et\ \ b)\ \widehat{\beta}_{2WLS}\underset{n\to\infty}{\overset{p}{\to}}\beta. \tag{3.10}$$

*Si de plus $E(|\eta_1|^{2\delta})<\infty$ et (**A2**) est vérifiée alors* (3.8) *et* (3.9) *restent vraies.*

Dans le cas instable, $\gamma\geq 0$, il apparaît que $\widehat{\omega}_{1WLS}$ et $\widehat{\omega}_{2WLS}$ ne sont pas consistants. On peut constater par ailleurs que l'estimateur de la seconde étape $\widehat{\theta}_{2WLS}$ est plus efficace que celui de la première, $\widehat{\theta}_{1WLS}$. Comparant l'efficacité asymptotique relative entre $\widehat{\theta}_{2WLS}$ et le $QMLE$, $\widehat{\theta}_{QML}$ (ex. Hamadeh et Zakoïan, 2011), nous avons conclu que les variances asymptotiques de $\widehat{\theta}_{QML}$ et $\widehat{\theta}_{2WLS}$ sont proportionnelles et sont égales pour $\delta=2$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\widehat{\theta}_{2WLS}$ soit plus efficace que $\widehat{\theta}_{QML}$ est donnée en terme des moments de l'innovation. Nous avons constaté que pour des innovations Gaussiennes ($\eta_t\sim N(0,1)$) le $QMLE$ est plus efficace que le $2SWLSE$ quand $\delta\neq 2$. Cependant, la supériorité de $2SWLSE$ est de plus en plus évidente que l'innovation est à queues lourdes comme pour la loi de Student ou le mélange de lois normales. Cela a été même confirmé en échantillons finis. En effet, nous avons comparé les propriétés finies de $2SWLSE$ et $QMLE$ ($\widehat{\theta}_{QML}$) sous la stabilité du modèle en se basant sur 1000 réplications d'un δ-$TARCH(1)$.

Bibliographie

[1] Aknouche, A. (2012). Multi-stage weighted least squares estimation of $ARCH$ processes in the stable and unstable cases. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **15**, 241-256.
[2] Francq, C. et Zakoïan, J.M. (2013). Inference in nonstationary asymmetric $GARCH$ models. *Annals of Statistics*, **41**, 1970-1998.
[3] Gonçalves, E. et Mendes-Lopes, N. (2012). On the structure of generalized threshold $ARCH$ processes. *Statistics and Probability Letters,* **80**, 573-580.
[4] Hamadeh, T. et Zakoïan, J.M. (2011). Asymptotic properties of LS and QML estimators for a class of nonlinear $GARCH$ processes. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **141**, 488-507.
[5] Hwang, S.Y. et Kim, T.Y. (2004). Power transformation and threshold modeling for $ARCH$ innovations with applications to test for $ARCH$ structure. *Stochastic Processes and Their Applications,* **110**, 295-314.
[6] Pan, J., Wang, H. et Tong, H. (2008). Estimation and tests for power-transformed and threshold $GARCH$ models. *Journal of Econometrics,* **142**, 352–378.