Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 15, 2016, pp. 7 - 12

2

Qualité de l'Approximation des Probabilités de Ruine par l'Approche Processus Régénératifs

S. HOCINE

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes (LAMOS)
Université de Béjaïa, Béjaïa 06000, Algérie
Tél. (213) 34 81 37 08

Résumé L'objectif de ce travail est d'illustrer numériquement la borne de stabilité de la déviation des probabilités de ruine établies par Kalachnikov en utilisant l'approche basée sur la théorie des processus régénératifs, et d'étudier la sensibilité de cette borne pour différentes distributions des montants des réclamation.

Mots-clés. Modèles de Risque, Stabilité, Probabilité de Ruine, Distribution Heavy Tailed, Réclamations Large.

2.1 Introduction

En assurance, la théorie du risque a pour objectif l'analyse mathématique des fluctuations aléatoires dans les opérations d'assurance. On qualifie de risque, la probabilité que la réserve d'une compagnie d'assurance, qui est la différence entre le total des primes reçues et le total des montants des réclamations payées, devienne négative à un certain temps. A ce moment-là, on dit que la ruine apparaît, du fait d'un mauvais calcul du taux de cotisation des assurés ou de sinistres trop importants à couvrir.

Le but premier de la théorie de la ruine a donc été de modéliser l'évolution de la richesse de la compagnie par un processus stochastique, dévaluer la probabilité de ruine, c'est-à-dire la probabilité que le scenario traduisant un échec se réalise, et d'estimer le niveau de réserve initiale pour rendre cette probabilité de ruine suffisamment faible.

En actuariat, on qualifie de risque la probabilité que la réserve d'une compagnie d'assurance, devient négative à un certain temps. A ce moment-là, on dit que la ruine apparaît ou la compagnie est en état d'insolvabilité.

Dans la théorie de la ruine, le problème de stabilité a été développé dans Beirlant and Rachev (1987) [4]. Par la suite, plusieurs travaux ont été réalisés dans ce sens. Nous citons le travail de V. Kalashnikov "*Continuity of ruin probability*" en 1997 [10] où les estimations de la continuité des probabilités de ruine sont données en fonction des métriques de probabilité.

En particulier, la méthode de stabilité forte (Aïssani and Kartashov (1983) [2], Kartashov (1996)[12]) connaît un large champs d'application après le travail de Kalashnikov "The Stability concept for stochastic risk models (2000)" [11]. Il a obtenu de nouvelles bornes de stabilité des probabilités de ruine en utilisant l'approche de stabilité forte, basée sur l'analyse de la stabilité des distributions limite des chaînes de Markov générales [2] [12] et une autre approche basée sur la théorie des processus régénératifs [11]. Nous avons également le travail de D. Rusaityte [17] pour un modèle de risque avec investissement. Dans le cas des modèles de risque semi-markovien, la méthode de stabilité forte a été étudiée par Enikeeva et al. dans [9] pour un modèle semi-markovien sans investissement et Rusaityte dans [18] pour plusieurs modèles semi-markoviens avec investissement.

Les distributions Heavy tailed jouent un rôle important dans l'analyse de plusieurs systèmes stochastiques. Elles ont été acceptées comme des modèles réalistes de divers phénomènes : le trafic Web (taille des requêtes, le temps de service,...), les réclamations dans l'assurance et de la finance (réclamations large),... etc. Beaucoup de références traitent des distributions heavy tailed (Consulter [1, 6, 7, 8, 14, 19]). Des exemples typiques des distributions heavy tailed : la distribution de pareto (et d'autres essentiellement en loi puissance), la distribution log-normal, la loi de Weibull, loi de Cauchy,... . La plupart des distributions heavy tailed utilisées dans la pratique appartiennent à l'une de ces familles.

L'objectif de ce travail est d'illustrer numériquement la borne de stabilité de la probabilité de ruine établies par Kalachnikov en utilisant l'approche basée sur la théorie des processus régénératifs [11], et d'étudier la sensibilité de cette borne en ce qui concerne les différentes distributions des montants des réclamation.

2.2 Modèle de Cramér-Lundberg

2.2.1 Description du modèle

Le modèle classique de la théorie de ruine représente l'évolution du résultat d'une compagnie d'assurances au cours du temps. Ce modelé est représenté par le processus de risque ou de réserve $\{R(t); t > 0\}$ donne par :

$$R(t) = u + c\,t - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \qquad t \geq 0 \tag{2.1}$$

avec $u \geq 0$ est le capital initial, $c > 0$ est le taux de primes constant par unité de temps, $\{X_i\}_{i\geq 1}$ est une séquence de variables aléatoires non-négatives , indépendantes et identiquement distribuées des montants des réclamations et $\{N(t),\ t \geq 0\}$ est un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ modélisant le nombre de réclamations jusqu'au temps t.

Le processus de surplus de sinistres est defini par :

$$S(t) = u - R(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i - c\,t. \tag{2.2}$$

Le temps de ruine

$$\tau(u) = inf\{t \geq 0 : R(t) < 0\} = inf\{t \geq 0 : S(t) > u\}. \tag{2.3}$$

est le premier instant ou le processus de réserve devient négatif ou de maniere equivalente le processus de surplus excède le niveau u.

Les probabilités de ruine en fonction de temps de ruine sont :
- En temps infini

$$\forall\ u \geq 0,\ \ \Psi(u,\infty) = \mathbb{P}(\exists\ \ s \geq 0/\ R(s) < 0) \tag{2.4}$$

- En temps fini t, la fonction donnée par

$$\forall\ u \geq 0,\ \ \Psi(u,t) = \mathbb{P}(\exists\ \ s \in [0,t]/\ R(s) < 0) \tag{2.5}$$

Les probabilités de non-ruine (ou de survie) correspondantes sont notées :

$$\varphi(u,t) = 1 - \Psi(u,t) \quad et \quad \varphi(u)\ = 1 - \Psi(u) \tag{2.6}$$

On appelle chargement ou coefficient de sécurité, la quantité définie par :

$$\eta = c - \lambda m \tag{2.7}$$

- Si $\eta > 0$, l'activité est dite "rentable".
- Si $\eta < 0$, la ruine est certaine
  $\Psi(u) = 1$.

Généralement, nous ferons l'hypothèse que l'activité est rentable.

Notons par $\{V_n\}_{n\geq 0}$ le processus inversé associé au modèle de risque. L'approche de stabilité consiste à identifier la probabilité de ruine $\Psi(u)$ associé au modèle de risque régie par un vecteur de paramètres $a = (c, \lambda, m)$, avec la distribution stationnaire du processus inverse $\{V_n\}_{n\geq 0}$, i.e.

$$\Psi(u) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(V_n > u),$$

où u est la réserve initiale.

2.3 Stabilité dans les modèles de risque

C'est l'académicien Kalashnikov qui, le premier, a appliqué la méthode de stabilité forte (Aïssani and Kartashov (1983)[2]) au modèle de risque[11]. En particulier il a obtenu des bornes de stabilité de la probabilité de ruine dans le modèle de risque classique avec un calcul explicite des constantes, en utilisant l'approche de stabilité forte, basée sur l'analyse de la stabilité des distributions limite des chaînes de Markov générales [2, 12] et une autre approche basée sur la théorie des processus régénératifs [11]. Dans cette section on s'intéresse à l'inégalité de stabilité obtenue par l'approche baser sur la théorie des processus régénératifs, résumée dans le théorème suivant :

Théorème 2.1 (Kalashnikov 2000) *[11]*
soit $\Psi_n(u)$ et $\Psi'_n(u)$ les probabilités de ruine associées aux processus inversés $\{V_n\}_{n\geq 0}$ and $\{V'_n\}_{n\geq 0}$ respectivement. Alors, pour $v(u) = e^{\epsilon u}$, $u \geq 0$ et $\epsilon > 0$,

Si

$$\mathbb{E}\, exp\ \big(\epsilon(Z - c\theta)\big) \leq \rho < 1 \tag{2.8}$$

$$\mathbb{E}\ \ exp\ (\epsilon Z) \leq \beta(\epsilon) < \infty. \tag{2.9}$$

Alors, l'inégalité de stabilité de la déviation des probabilités de ruine est donnée par :

$$\sup_{n\geq 0} |\Psi_n - \Psi'_n|_v = \sup_n |G_n - G'_n|_v \leq \frac{\gamma(\epsilon)\ \ \mu}{1-\rho} \tag{2.10}$$

avec

$$\gamma(\epsilon) = \sup_n\ \mathbb{E}\ \ e^{\epsilon V_n} < \infty.$$

et

$$\mu = \sup_{-\infty < x < \infty} e^{\epsilon x} |F_\xi - F_{\xi'}|(x)$$

2.4 Qualité de l'approximation des Probabilités de ruine "Approche par processus régénératifs

2.4.1 Construction de l'algorithme

Nous voulons étudier la qualité et la sensibilité de la borne de stabilité de la probabilité de ruine définie dans la formule (2.10) du théorème 1 pour diffirentes distributions des montants de réclamation. Pour ce faire, nous avons élaboré l'algorithme suivant :

Algorithm 1 Approche Processus Régénératifs

Etape 1 Introduction des paramètres : (c, λ, m) du modèle idéal et (c', λ', m') du modèle perturbé.

Etape 2 Vérifier la positivité des chargements de sécurité relatifs η et $\eta\prime$
Si oui aller à l'étape 3
Sinon aller à l'étape 1

Etape 3 Générer une valeur de ϵ pour que $0 < \rho < 1$ et et Γ_{PR} soit minimale.

Etape 4 Calculer la borne Γ_{PR} de la déviation $|\Psi_n - \Psi'_n|_v$ donnée par :

$$\sup_{n\geq 0} |\Psi_n - \Psi'_n|_v \leq \frac{\gamma(\epsilon)\ \ \mu}{1-\rho} = \Gamma_{PR}.$$

Afficher les résultats.

La construction des étapes de cet algorithme est basée sur la vérification des conditions du critère de la stabilité ainsi que la positivité du chargement de sécurité afin d'éviter une ruine certaine. Son implémentation nous permettra de calculer la borne supérieure Γ_{PR} donnée par (2.10).

2.4.2 Distributions des montants des réclamations

Les distributions suivante sont définies à dépendre de leurs paramètres, c'est-à-dire qu'ils peuvent être soit dans la classe des distributions a queue légère, moyenne ou lourde, selon leurs paramètres.

1. Distribution de la loi Lognormal

$$f(t, \alpha, \beta) = \frac{1}{t\beta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(log(t)-\alpha)^2}{2\beta^2}}, \qquad t \geq 0. \tag{2.11}$$

2. Distribution de la loi de Weibull

$$f(t,\alpha,\beta)=\beta\alpha^{-\beta}t^{\beta-1}e^{-(\frac{t}{\alpha})^{\beta}},\qquad t\geq 0. \tag{2.12}$$

3. Distribution de la loi Logistic tronquée

$$f(t)=\frac{2}{\beta}e^{\frac{t-\alpha}{\beta}}(1+e^{\frac{t-\alpha}{\beta}})^{-2},\qquad t\geq\alpha. \tag{2.13}$$

4. Distribution de la loi de Exponentielle

$$f(t)=\frac{1}{\mu}t^{-\frac{t}{\mu}},\qquad t\geq 0. \tag{2.14}$$

Mean	Exp λ	Weibull (α,β)	LogNormal (α,β)	Logistic (α,β)
2.0000	2.0000	(2.2397 , 3.0000)	(0.6131 ’ 0.4000)	(1.0000 ’ 0.7213)
2.1000	2.1000	(2.3517 , 3.0000)	(0.6619 , 0.4000)	(1.1000 ’ 0.7213)
2.2000	2.2000	(2.4637 , 3.0000)	(0.7085 , 0.4000)	(1.2000 ’ 0.7213)
2.3000	2.3000	(2.5756 , 3.0000)	(0.7529 , 0.4000)	(1.3000 ’ 0.7213)
2.4000	2.4000	(2.6876 , 3.0000)	(0.7955 , 0.4000)	(1.4000 ’ 0.7213)
2.5000	2.5000	(2.7996 , 3.0000)	(0.8363 , 0.4000)	(1.5000 ’ 0.7213)
2.6000	2.6000	(2.9116 , 3.0000)	(0.8755 , 0.4000)	(1.6000 ’ 0.7213)
2.7000	2.7000	(3.0236 , 3.0000)	(0.9133 , 0.4000)	(1.7000 ’ 0.7213)
2.8000	2.8000	(3.1356 , 3.0000)	(0.9496 , 0.4000)	(1.8000 ’ 0.7213)
2.9000	2.9000	(3.2476 , 3.0000)	(0.9847 , 0.4000)	(1.9000 ’ 0.7213)
3.0000	3.0000	(3.3595 , 3.0000)	(1.0186 , 0.4000)	(2.0000 ’ 0.7213)

TABLE 2.1. Paramètres des distributions des montants des réclamations

2.4.3 Implémentation de l’algorithme et interprétation des résultats

Cette section est consacrée à présenter les différents résultats numériques et graphiques obtenus lors de l’étude de l’influence des distributions à queue lourde sur la stabilité d’un modèle de risque, en tenant compte des distributions définies dans la section précédant.

ϵ	Mean	Exp	Weibull	LogNormal	Logistic
-0.5	2.0000	0.2052	0.5662	1.3842	0.6168
-0.4	2.1000	0.1610	0.4474	1.0864	0.5003
-0.3	2.2000	0.1185	0.3307	0.7975	0.3793
-0.2	2.3000	0.0776	0.2173	0.5211	0.2549
-0.1	2.4000	0.0381	0.1070	0.2548	0.1280
0	2.5000	0	0	0	0
0.1	2.6000	0.0368	0.1034	0.2439	0.1289
0.2	2.7000	0.0725	0.2030	0.4775	0.2582
0.3	2.8000	0.1069	0.2993	0.7002	0.3879
0.4	2.9000	0.1404	0.3914	0.9131	0.5172
0.5	3.0000	0.1729	0.4804	1.1163	0.6465

TABLE 2.2. Borne de stabilité Γ_{PR}

D’après le Tableau (2.2) et à la figure (2.1), nous remarquons que l’erreur due à l’approximation est proportionnelle à la perturbation du montant moyen des réclamations. Autrement dit, la borne de stabilité augmente avec l’augmentation de la perturbation. Même en prenant des distributions ayant la même moyenne que celle exponentielle, on obtient des bornes

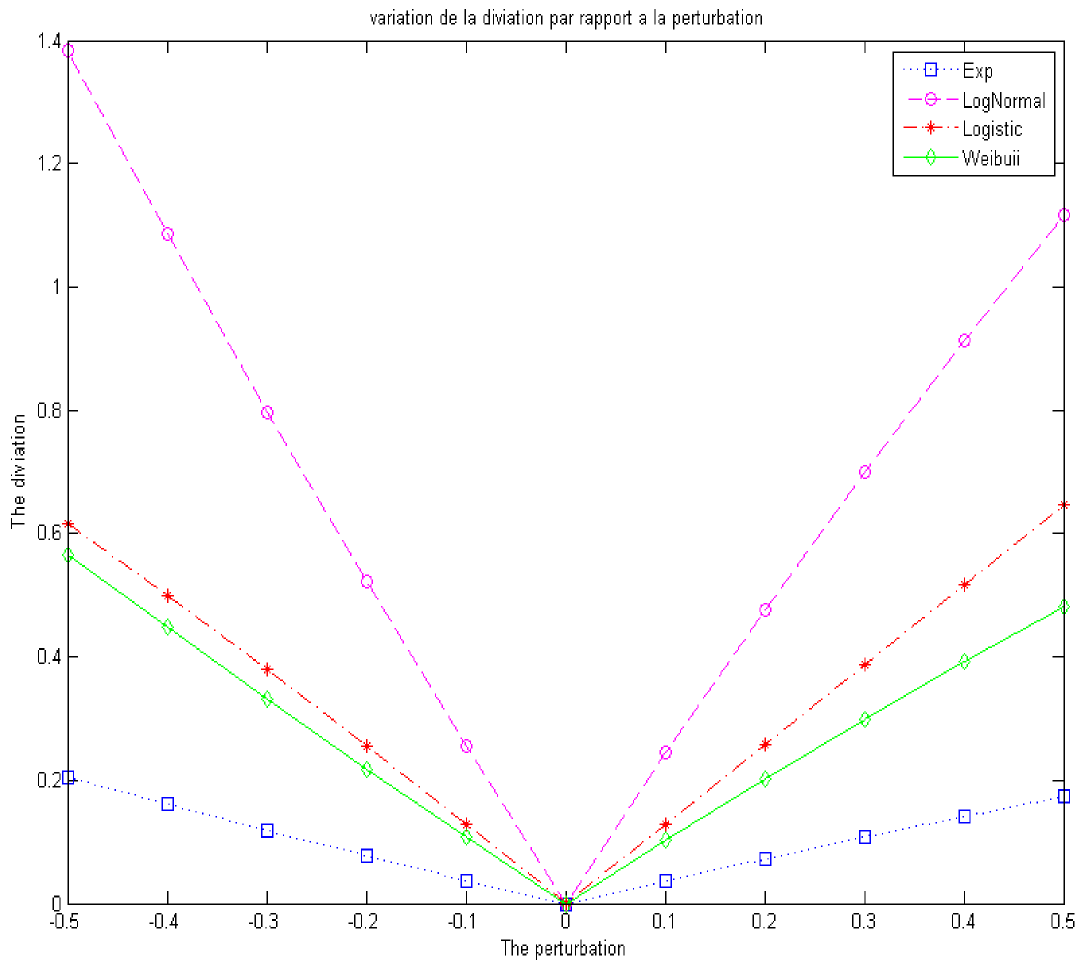

FIGURE 2.1. Variation de la borne de stabilité Γ_{PR}

relativement éloignées de celles d'une exponentielle. Ceci peut être expliqué par l'influence du poids des queues des différentes distributions prises en compte.

En comparaison avec les autres distributions, nous notons que la borne de stabilité de la distribution Weibull est plus proche de celle de la distribution exponentielle, par contre la borne de stabilité de la distribution LogNormal est la plus loin de celle de la distribution exponentielle. Cette différence est due peut-être au choix particulier des paramètres de ces distributions, sachant que la distribution Weibull de paramètres $(\alpha, \beta \geq 1)$ est classée comme distribution à queue légère, et la distribution LogNormal est classée comme une distribution heavy tailed.

2.5 Conclusion

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à l'approximation de la probabilité de ruine d'un modèle de risque classique par l'approche processus régénératifs dans le cas des réclamations large. Nous avons étudié l'impact de certaines réclamations large (distributions heavy tailed) sur la qualité de cette approximation.

Les résultats obtenus montrent que dans certaines situations, l'approximation des caractéristiques d'un modèle de risque avec une distribution heavy tailed par un modèle classique (avec des montants de réclamations distribués suivant une loi exponentielle) est possible.

Références

1. R. J. Adler, R. E. Feldman, and M. S. Taqqu (eds). A Practical Guide to Heavy Tails. Statistical Techniques and Applications. Birkhäuser,Boston, 1998.
2. D. Aïssani and N. V. Kartashov. Ergodicity and stability of Markov chains with respect to operator topology in the space of transition kernels. *Compte Rendu Academy of Sciences U. S. S. R, ser. A, 11*. 3–5, 1983.
3. Asmussen S. Ruin probabilities. World scientific. *Singapore, 2000*.
4. J. Beirlant and S. T. Rachev. The problems of stability in insurance mathematics. *Insurance : Mathematics and Economics 6*. 179–188, 1987.
5. T. Buch-Larsen, J.P. Nielsen, M. Guillen and C. Bolancé. Kernel density estimation for heavy-tailed distribution using the Champernowne transformation. Statistics 6, 503–518, 2005.
6. S. Coles An Introduction to Statistical Modelling of Extreme Values. Springer, Berlin, 2001.
7. P. Embrechts, C. Klüppelberg, and T. Mikosch. Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. Springer, Berlin, 1997.
8. P. Embrechts, N. Veraverbeke. Estimates for the probability of ruin with special emphasis on the possibility of large claims. Insurance :Math. Econom. 1, 55–72, 1982.
9. F. Enikeeva, V. Kalashnikov and D. Rusaityte. Continuity estimates for ruin probabilities. *Scandinavian Actuarial Journal*. 18-39, vol 10, 2001.
10. V. Kalashnikov. Continuity of Ruin Probabilities. Laboratory of Actuariat Mathematics, Univarsity of Copenhagen, Working Paper Nr 141, March 1997.
11. V. Kalashnikov. The Stability concept for stochastic risk models. *Working Paper Nr 166. Lab. of Actuarial Mathematics. University of Copenhagen*, 2000.
12. N. V. Kartashov. Strong Stable Markov Chains. VSP, Utrecht, 1996.
13. D.G. Konstantinidis. Risk models with extremal subexponentiality. Brazilian Journal of Probability and Statistics, Brazilian Statistical Association 21, 63–83, 2007.
14. D.G. Konstantinidis. Comparison of ruin probability estimates in the presence of heavy tails. Journal Mathem 93, 552–562, 1999.
15. H.H. Panjer and G.E. Willmot. Insurance Risk Models. The Society of Actuaries. 1992.
16. S.I. Resnick. Heavy-Tail Phenomena. Probabilistic and Statistical Modeling. Springer, New York, 2006.
17. D. Rusaityte. Continuity of the ruin probability in a model with borrowing and investments. Laboratory of Actuarial Mathematics, University of Copenhagen. Working Paper Nr. 172, 2001.
18. D. Rusaityte. Stability bounds for ruin probabilities in a Markov modulated risk model with investments. Laboratory of Actuarial Mathematics, University of Copenhagen. Working Paper Nr. 178, 2001.
19. G. Tsitsiashvili, D.G. Konstantinides. Supertails in risk theory. Far Eastern Mathem. J. 2, 68–76, 2001.