Séminaire Mathématique de Béjaia (LaMOS),
Volume 14, 2015, pp. 37 - 41

7

Estimation non paramétrique dans la stabilité des chaînes de Markov.
(Méthode du noyau et stabilité forte.)

M. CHERFAOUI, D. AISSANI et S.ADJABI

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes (LAMOS)
Université de Béjaïa, Béjaïa 06000, Algérie
Tél. (213) 34 81 37 08

Résumé Dans ce travail, à l'aide de la méthode stabilité forte nous avons dégagé les conditions ainsi que les inégalités de la $v-$stabilité d'une classe de systèmes d'attente lorsque l'une des lois générale du système d'attente considéré est remplacée par son estimateur à noyau. En particulier, nous avons montré que l'analyse des inégalités de stabilité de tels systèmes revient à l'analyse du biais pondéré, par la norme $v(k) = \beta^k(\beta > 1$ et $k \in \mathbb{N})$, de l'estimateur à noyau de leurs distributions stationnaires.
Mot clés : Stabilité forte, Bornes de stabilité, Estimateur à noyau, Biais, Erreur.

7.1 Introduction

Ces dernières années, un cycle de recherche a été initié pour prouver l'efficacité de la méthode de stabilité forte pour l'évaluation des performances de divers systèmes modélisés par une chaîne de Markov. En particulier, Barèche et Aïssani [2] ont montré que quand les lois du système sont inconnues ($M/GI/1$, $GI/M/1$ et $G/G/1$) alors on peut appliquer la méthode du noyau pour estimer les distributions en question.

L'objectif du présent travail est d'approfondir ces questions, en élargissant le domaine d'investigation pour pouvoir considérer certaines familles des systèmes d'attente. Il s'agira d'estimation non paramétrique de la chaîne de Markov modélisant les systèmes appropriés (par la méthode du noyau). En effet, l'idée est d'étudier l'influence de l'estimation non paramétrique, sur les conditions et l'erreur d'approximation de certains systèmes d'attente lorsque une où plusieurs distributions définissant le système considéré sont remplacées par leurs estimateurs à noyau. Autrement dit, on vas élaborer de nouvelles bornes de v-stabilité des systèmes d'attente dans un milieu non paramétrique.

7.2 L'estimation à noyau dans les chaînes de Markov

Les méthodes de l'estimation paramètrique d'un opérateur de transition associé à une chaîne de Markov, ont l'avantage d'être simple à utiliser, mais il est bien difficile d'estimer avec précision des opérateurs de transition modélisant des phénomènes complexes. Pour palier à ces situations difficiles, on fait souvent appel aux méthodes d'estimation non paramétrique. Roussas (1969) [8] est le premier à aborder la question de l'estimation fonctionnelle en utilisant des observations markoviennes. L'auteur a établi la convergence de l'estimateur à noyau de la densité de la loi de transition au sens de L^2. Les résultats obtenus par ce dernier ont été complétés dans Masry et Györfi (1987) [7], Basu et Sahoo (1998) [3]. Plus tard, Laksaci et Yousfate (2002) [6] s'intéressent à la construction et aux propriétés d'un estimateur fonctionnel de la densité de l'opérateur de transition.

Par exemple si on considère un processus de Markov homogène et ergodique $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. La probabilité de passage de$(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$, ainsi que la loi initiale, sont supposées absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue noter μ. La densité de la loi de transition de t à $t+s$ sachant x au point y est notée $p(x, s, y)$.

Parmi les estimateurs fonctionnel de $p(x, s, y)$ on à :

$$P_n(x, s, y) = \frac{1}{h_n} \frac{\sum_{i=0}^{n} K((x - X_i)/h_n)K((y - X_{i+s})/h_n)}{\sum_{i=0}^{n} K((x - X_i)/h_n)} \tag{7.1}$$

où K est un noyau positif.

Cet estimateur a été utilisé par Youndjé (1996) [9] pour estimer la densité conditionnelle en utilisant un n-échantillon $i.i.d.$

7.3 Stabilité du système $M/M/1$ et les Noyaux gamma

7.3.1 Stabilité du système $M/M/1$

Considérons le modèle d'attente $GI/M/1$ $(FIFO, \infty)$. Nous supposons que les temps d'inter-arrivées sont $i.i.d.$ issue d'une variables aléatoires de fonction de répartition $G(t)$ de moyenne $1/\lambda$, et les durées de service sont $i.i.d$ issues d'une distribution exponentielle de paramètre μ. Inter-arrivées sont indépendantes de temps de service. La chaîne de Markov induite modélisant ce système s'écrit comme suite :

$$X_{n+1} = X_n - D_n + 1, \tag{7.2}$$

Les probabilités de transition de X_n s'écrivent comme suite :

$$P_{ij} = \begin{cases} \int_0^\infty \frac{e^{-\mu t}(\mu t)^{i-j+1}}{(i-j+1)!} g(t)dt & \text{si } 1 \le j \le i+1, \\ 1 - \sum_{j=1}^{i+1} P_{ij} & \text{si } j = 0, \\ 0 & \text{si non.} \end{cases} \tag{7.3}$$

Considérons aussi le système $M/M/1$ $(FIFO, \infty)$, où les clients arrivent selon un processus de Poisson de paramètre λ et de la même distribution de service que le système précédent.

$$P^*_{ij} = \left\{ \int_0^\infty \frac{e^{-\mu t}(\mu t)^{i-j+1}}{(i-j+1)!} E_\lambda dt \ \text{ si } 1 \le j \le i+1,; 1 - \sum_{j=1}^{i+1} P^*_{ij} \ \text{ si } j = 0 \ \text{ et } 0 \ \text{ si non} \right\}.$$

L'étude de stabilité du système $M/M/1$ lorsque ce dernier est sujet à des petites perturbations au niveau de la distribution des temps des inter-arrivées avait été réalisé par Bouallouche et Aïssani(2005) [4]. Les conditions et les inégalités de stabilité obtenues par les auteurs sont résumées dans les théorèmes suivants :

Théorème 7.1 *Supposons que dans le système $M/M/1$ la charge $\lambda/\mu < 1$. Alors, pour tout β tel que $1 < \beta < \lambda/\mu$, la chaîne de Markov X_n est fortement stable, après une petite perturbation de la distribution des temps des inter-arrivées, pour $\upsilon(k) = \beta^k$.*

Théorème 7.2 *Soit P (resp. P^*) l'opérateur de transition de la chaîne de Markov induite associe au système $M/M/1$ (resp. $GI/M/1$). Alors, pour tout β tel que $1 < \beta < \lambda/\mu$, nous avons :*

$$\|P^* - P\| \leq (1+\beta)w \quad \textit{(avec} \quad w = \int_0^\infty d|G - E|(t))$$

Théorème 7.3 *Supposons que dans un système $M/M/1$, la chaîne de Markov X_n est fortement stable, et*

$$w < \frac{(1-\rho)(\mu - \lambda\beta)}{(1+\beta)(2\mu - \lambda(1+\beta))}.$$

Alors,

$$\|\pi^* - \pi\| \leq \frac{(1+\beta)(2*\mu - \lambda(1+\beta))(\mu-\lambda)w}{\frac{(\beta-1)(\mu-\lambda)^3}{(\beta-1)\mu+\lambda\beta}} - (2\mu - \lambda(1+\beta))(1+\beta)(\mu - \lambda\beta)w$$

pour tout β tel que $1 < \beta < \lambda/\mu$, où $\rho = \beta\frac{\lambda}{\mu - (\mu/\beta) + \lambda}$.

7.3.2 Méthode du noyau et Stabilité du système $M/M/1$

Supposons que ne nous disposons que d'un n-échantillon $T_1, T_2, ..., T_n$ qui représente les durées des inter-arrivées, ayant comme densité de probabilité inconnue g, dans le système $GI/M/1$. L'estimateur de la matrice de transition, $\mathbb{P}$, de la chaîne de Markov induite associée au système est donné par :

$$\hat{P}_{ij} = \begin{cases} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\mu t}(\mu t)^{i-j+1}}{(i-j+1)!} g_h(t)dt & \text{si } 1 \leq j \leq i+1, \\ 1 - \sum\limits_{j=1}^{i+1} \hat{P}_{ij} & \text{si } j = 0, \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

où $g_h(t)$ est l'estimateur à noyau Gamma de $g(t)$, proposé par Chen [5], défini comme suit :

$$g_h(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{T_i^{(t/h)} e^{-(T_i/h)}}{h^{(t/h)+1}\Gamma((t/h)+1)}, \quad \text{avec } h \text{ est le paramètre de lissage.} \tag{7.4}$$

$$\|\hat{P}-\tilde{P}\|_v = \sup_{k\geq 0}\frac{1}{\beta^k}\sum_{j\geq 0}\beta^j\left|\hat{P}_{kj}-\widetilde{P}_{kj}\right| = \sup_{k\geq 0}\frac{1}{\beta^k}|P_{k0}-\widetilde{P}_{k0}| + \sum_{j\geq 1}\beta^j\left|\hat{P}_{kj}-\widetilde{P}_{kj}\right|$$

$$= \sup_{k\geq 0}\frac{1}{\beta^k}|P_{k0}-\widetilde{P}_{k0}| + \sum_{j\geq 1}\beta^j\left|\int_0^\infty \frac{e^{-\mu t}(\mu t)^{i-j+1}}{(i-j+1)!}\left(g_h(t)-E_\lambda(t)\right)dt\right|.$$

$$\|\hat{P}-\tilde{P}\|_v = \sup_{k\geq 0}\frac{1}{\beta^k}|P_{k0}-\widetilde{P}_{k0}| + \sum_{j\geq 1}\beta^j\left|\int_0^\infty \frac{e^{-\mu t}(\mu t)^{i-j+1}}{(i-j+1)!}\left(E(g_h(t))-E_\lambda(t)\right)dt\right|$$

$$= \sup_{k\geq 0}\frac{1}{\beta^k}|P_{k0}-\widetilde{P}_{k0}| + \sum_{j\geq 1}\beta^j\left|\int_0^\infty \frac{e^{-\mu t}(\mu t)^{i-j+1}}{(i-j+1)!}Biais\{g_h(t)\}dt\right|;$$

$$Biais\{g_h(t)\} = h\{E'_\lambda(t) + \frac{t}{2}E''_\lambda(t)\} + \circ(h). \tag{7.5}$$

7.3.3 Analyse du biais ou stabilité d'un système ?

on a

$$\|E(\hat{P})-\tilde{P}\|_v = \|biais(\hat{P})\|_v = \sup_{k\geq 0}\frac{1}{\beta^k}\sum_{j\geq 0}\beta^j\left|Biais\{\hat{P}_{kj}\}\right|;$$

et

$$\|E(\hat{\pi})-\tilde{\pi}\|_v = \|biais(\hat{\pi})\|_v$$

On constate clairement que, l'avantage de la présente technique réside dans le fait que : 1) Les biais des estimateurs existent dans la littérature, sous leurs formes explicite d'où les quantités $\|biais(\hat{P})\|_v$ et $\|biais(\hat{\pi})\|_v$ peuvent être estimer facilement. 2) Moins coûteuse au sens de temps de calcule par rapport à la technique classique aborder dans [2]. 3) On peut considérer la perturbation de plusieurs paramètres simultanément (ex : $GI/GI/1$ avec vacances $\rightsquigarrow M/M/1$, $GI/M/1$ avec vacances et pannes $\rightsquigarrow GI/M/1$,...).

7.4 Conclusion et Perspectives

Dans cet exposé, nous avons présenté une idée sur la généralisation de l'application et de l'adaptation des estimateurs à noyaux dans l'étude de la stabilité des chaînes de Markov par la méthode stabilité forte.

Afin de concrétiser cette idée, il est nécessaire de quantifier les différentes quantités présentées, c'est-à-dire d'élaborées leurs formes explicites. Il sera intéressant de prendre en considération le cas la qualité des bornes de stabilité en fonction du choix de l'estimateur, du noyau et de la procédure de sélection du paramètre de lissage. De plus, on doit appuyer nos résultats par une application numérique où nous considérons la variation du paramètre perturbé, la taille de l'échantillon,...

Références

1. Aïssani, D. and Kartashov, N.V., (1983) Ergodicity and stability of Markov chains with respect to operator topology in the space of transition kernels. *Doklady Akademii Nauk Ukrainskoi S.S.R. seriya A* 11, 3–5.
2. Bareche, A. et Aïssani, D. (2008), Kernel density in the study of the strong stability of the M/M/1 queueing system, *Operations Research Letters*, 36, 535–538.
3. Basu, A. K. et Sahoo, D.K. (1998), On Berry–Esseen theorem for nonparametric density estimation in Markov sequences, *Bull. Inform. Cybernet.*, 30, 25–39.
4. Bouallouche-Medjkoune,L. and Aïssani, D. (2005) Measurement and performance of the strong stability method, *Theor. Probab. Math. Stat.* 72, 1–9.
5. Chen, S. (2000), Probability Density Functions Estimation Using Gamma Kernels, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 52, 471–480.
6. Laksaci, A. et Yousfate, A. (2002), *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 334, 1035–1038.
7. Masry, E. et Györfi, L. (1987), Strong consistency and rates for recursive probability density estimators of stationary processes, *J. Multivariate Anal.*, 22, 79–93.
8. Roussas, G.G. (1969) Nonparametric estimation in Markov processes, *Ann. Inst. Statist. Math.*, 21, 73–87.
9. Youndjé, E. (1996) Propriétés de convergence de l'estimateur à noyau de la densité conditionnelle, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* 41, (7-8) 535–566.