Séminaire Mathématique de Béjaia (LaMOS),
Volume 14, 2015, pp. 27 - 30

5

La Forme Produit des Réseaux de Petri Stochastiques

L. IKHLEF, D. AISSANI et O. LEKADIR

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes (LAMOS)
Université de Béjaïa, Béjaïa 06000, Algérie
Tél. (213) 34 81 37 08

Résumé Dans cet exposé, il s'agit de présenter quelques résultats concernant la caractérisation (structurelle) et l'analyse de certaines classes de réseaux de Petri stochastiques ayant une distribution stationnaire à forme produit. Une distribution stationnaire est dite à forme produit si elle peut être factorisée en termes qui ne dépendent que des paramètres locaux. Pour les réseaux Markoviens, avoir une solution à forme produit est une propriété très importante. Elle donne la possibilité de déterminer la distribution stationnaire sans avoir à calculer tous les états du système, donc permet de simplifier les calculs de performances de ce dernier.
Il s'agit d'étudier la classe de Réseaux de Petri Stochastiques à Forme produit (PF-SPN) . Cette classe est décrite par une distribution qui se factorise en produit des distributions de ses composants un état de l'art sur l' identification des conditions d'existence de la PF-SPN est donné. Finalement, un exemple détaillé sur la modélisation d'un réseau de file d'attente multi-classes BCMP par PF-GSPN est traité.
Mots clés : Réseaux de Petri Stochastiques ; Forme produit ; Distribution Stationnaire ; Réseaux de files d'attente, Modélisation.

5.1 Introduction

L'évolution technologique de ces dernières années a induit une complexité des systèmes dans différents domaines, qui devient de plus en plus difficile à gérer. Cette évolution s'est accompagnée d'un développement et d'une diversification des outils permettant de faire une analyse qualitative et quantitative de ces systèmes, nous citons : les réseaux de files d'attente (QN), Les algèbres de processus (MPA), les réseaux de Petri stochastique (SPN, $GSPN$, $DSPN$,...).

5.2 Réseaux de Petri Stochastiques (SPN)

Les réseaux de Petri (PN) sont des outils graphiques et mathématiques permettant de modéliser le comportement dynamique des systèmes à événements discrets et continus comme les systèmes manufacturiers, les systèmes de télécommunication, les réseaux de transport, etc.
Les réseaux de Petri ont été introduits par Carl Adam Petri dans sa thèse Kommunikation mit Automaten au début des années soixante.
Un PN est un **graphe** biparti orienté constitué de **places**, de **transitions** et d'**arcs** qui relient les transitions aux places (**input arc**) et les places aux transitions (**output arc**). Les transitions noté par des rectangles, les places par des cercles et les arcs par des flèches. Des **jetons** (marques) associé aux places noté par des point ou des nombre à l'intérieur d'une place. Des entier positif appelé **poids** associé aux arcs. L'état d'un PN est définie par le nombre de marques dans chaque places, représenté par le vecteur $M(m(p_1), m(p_2), ..., m(p_n))$ appelé

marquage d'un PN. Une transition t est **sensibilisée** si le nombre de jetons dans chaque place d'entré à t est supérieur ou égal au poids de l'arc joignant cette place à t. Le **franchissement** (le tir) de t consiste à retirer dans les places d'entré de t , le nombre de jetons indiqué sur les arcs entrants de t et en déposant ensuite, à chaque place de sortie le nombre de jetons correspond au poids indiqué sur l'arc sortant de t . Il est possible d'obtenir l'ensemble des suites finies ou infinies dévolution du système à partir du **marquage initial** M_0 , cette suite d'ensemble définit l'ensemble des marquages accessibles. Le graphe des marquages d'un PN noté $R(PN, M_0)$ est un graphe dont ses nœuds sont les marquages accessibles reliant par des arcs orientés définis par la relation d'accessibilité directe et étiquetés par les transitions de réseau correspondant. Les ouvrages [1, 2, 3] constituent de bons outils pour un état de l'art sur la théorie des PN.

Les réseaux de Petri stochastiques (SPN) ont été suggérés par Molloy, Florin, Natkin 1985 [1]. Ils ont introduit la notion de temps pour répondre aux exigences de certain type des systèmes. Un SPN est obtenu à partir du PN classique, en associant une fonction de distribution de probabilité pour le délai de franchissement de chaque transition. Depuis ce travail plusieurs extensions ont été apparues comme (GSPN, DSPN,...).

5.3 Avantage des SPN

- Puissance d'expression (Synchronisation - Concurrence - Blocage,...).
- Combiner l'analyse qualitative et quantitative.
- Offre un moyen riche et efficace d'expression des indices de performance et la génération de CMTC
- Plusieurs logiciels dédiés aux PN (Time Net, GreatSPN,...)

5.4 La forme produit ($PF - SPN$)

L'analyse d'un $CTMC$ lié à un $GSPN$ peut être très dure en raison du problème d'explosion de l'espace d'état (explosion combinatoire). La taille de graphe de marquage d'un SPN ($GSPN$) augmente de façon exponentielle avec à la fois le nombre de jetons dans le marquage initial et avec le nombre de places dans le réseau. Récemment certains classes des SPN et $GSPN$ ont été découverts, qui sont caractérise par la distribution de probabilité à l'état stationnaire de leurs marquage qui peut être factorisé ce qui donne la " **Forme Produit**". Plusieurs efforts de recherche ont été consacrés pour identifier les conditions d'existence de la forme produit des SPN et $GSPN$, nous pouvons récapituler ces résultats en identifiant trois classes de la forme produit :

- La Classe Boucherie ("A.A.Lazar et T.G.Robbertazzi 1987"- "Boucherie R.J 1994" - "Matteo Sereno") ;

– La classe Coleman et al ("W.Henderson, P.Lucic et P.G.Taylor 1989 J.L.Coleman , W.Henderson et P.G.Taylor 1995" - "S.Haddad , P.Moreaux , M.Sereno , M.Silva" - "Matteo Sereno Gearfranco Balbo 1997") ;
– La Classe Balbo et al ("G.Balbo et al 2002"- "G.Blabo et al 2003"[4]- "Marco Gribaudo, Matteo Sereno 1998")

5.5 Exemple

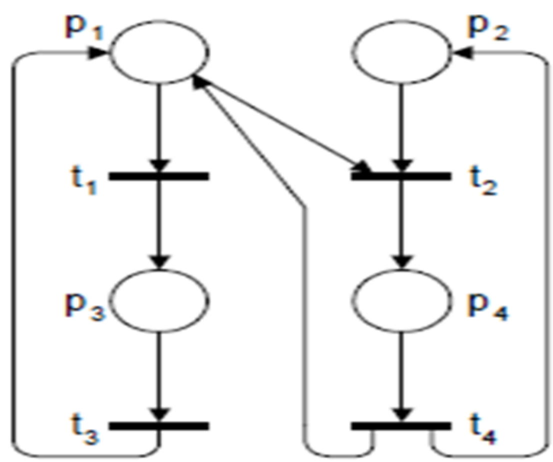

FIGURE 5.1. Stochastique Petri net (SPN)

La matrice d'incidence associé au SPN (FIG.5.1) est donné par :

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Après la résolution de système : $Cx^T = 0$, On voie bien que ce réseau admit deux T-semi-flows $x_1 = (1,0,1,0)$ et $x_2 = (0,1,0,1)$, $\|x_1\| = \{t_1, t_3\}$ et $\|x_2\| = \{t_2, t_4\}$
et les transitions t_1, t_2, t_3, t_4 sont couvertes par les deux T-semi-flows donc d'après la classe de Coloman ce PN est un π-net sa distribution stationnaire est donné par :

$$\pi(m) = \frac{1}{G}(\frac{\mu_1}{\mu_3})^{m_2}(\frac{\mu_2}{\mu_4})^{m_4}$$

tels que :
μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 : Respectivement sont les taux de franchissement des transitions t_1, t_2, t_3, t_4.
m_2, m_4 : Sont le nombre de jeton dans la place p_2 et p_4.
G : Constante de normalisation.

5.6 Conclusion

Notre futur travail pourrait être :

– L'application de la technique décrite par Coleman pour dériver d'autres nouveaux résultats de $PF - QN$.
– Une autre direction de recherche est la dérivation d'autres techniques qui permettent de transformer un $GSPN$ associé à un $NPF - QN$ à un $GSPN$ à forme produit.

Références

1. M.K.Molloy" Performance analysis using stochastic Petri nets". IEEE Sebtember 1982.
2. N.Gharbi et M.Ioualalen,"Performance evaluation of multi-server queues with station and server vacations". In International Industrial Simulation Conference397-401, Malaga, Spain, June 2004.
3. S.Kishor, C.Oliver," Stochastic Petri net analysis of finite population vacation queueing systems", Queuing systems 8(1991)111-118.
4. G.Balbo, S.C.Bruell et M.Sereno,"Product form solution for Generalized Stochastic Petri Nets", IEEE Transactions on software engineering, Vol.28, NO. 10, October 2002.