Séminaire Mathématique de Béjaia (LaMOS),
Volume 14, 2015, pp. 21 - 25

4

Processus régénératifs dans quelques modèles de files d'attente

S. HOCINE

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes (LAMOS)
Université de Béjaïa, Béjaïa 06000, Algérie
Tél. (213) 34 81 37 08

Résumé Les Processus régénératifs jouent un rôle majeur dans l'application des probabilités. Dans la théorie des files d'attente, les événements régénératifs sont souvent liés à une file vide, ou l'arrivée des clients à un système vide. L'objectif de ce travail, est de présenté une construction des points de régénération pour les deux modèles de files d'attente à serveur unique (GI/GI/1) et multiserveurs (GI/GI/N), en se basant sur le travail de Foss and V. Kalashnikov (Regeneration and renovation in queues).
Mots-clés. Régénération, Renouvellement, Système de file d'attente, le système multiserveur, temps d'attente.

4.1 Introduction

La notion de régénération est très importante dans la théorie des probabilités en général et en théorie des files d'attente en particulier. Elle est utilisée pour l'analyse qualitative des systèmes d'attente (Ergodicité, stabilité, la convergence en régime stationnaire) et pour l'estimation quantitative, y compris la simulation (caractéristiques stationnaires, l'estimation de la stabilité et le taux de convergence). Étant introduit par W.L. Smith cette notion a été généralisée par Thorisson [10] et Asmussen [1] de telle sorte que ils ont permis la dépendance entre les cycles de régénération. Cette généralisation est très importante pour la théorie des files d'attente car elle conserve tous les résultats importants et conduit à la possibilité d'étudier une grande classe de files d'attente (en comparaison avec la régénération de Smith).

Ces deux approches permettent de construire des événements régénératifs pour d'autres systèmes d'attente (files d'attente multiserveurs et multi-phases). Une fois que les points de régénération sont construits, il est possible d'appliquer tous résultats connus pour les processus de régénération (estimations du taux de convergence, estimations de la stabilité) afin d'étudier le modèle de file d'attente correspondant. Un exemple d'une telle étude figure dans Asmussen et Foss [2] où la construction générale proposée est utilisée pour l'obtention des résultats d'ergodicité.

Les événements régénératifs dans la théorie des files d'attente sont souvent liés à une file vide, ou l'arrivée des clients à un système vide.

4.2 File d'attente à serveur unique

Considérons la file d'attente $GI/GI/1/\infty$ qui satisfait l'équation de Lindley :

$$w_{n+1} = (w_n + s_n - e_n)_+ , \qquad n \geq 0, \tag{4.1}$$

Où $(.)_+ = max\,(0, .)_+$, et $\{s_n\}$,$\{e_n\}$ représentent respectivement les durées de service et l'inter-arrivées des clients, constituées de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, et $\{w_n\}$ représente la durée d'attente.

Initialisons la durée de service et l'inter-arrivée à 0.
Alors

$$A_n = \{w_n = 0\} \tag{4.2}$$

est un événement régénératif.

Notons par $R(k)$ l'instant d'occurrence du $k^{\text{ème}}$ événement régénératif,

$$\theta_k = R(k) - R(k-1), \quad k \geq 1, R(0) = 0.$$

Si

$$Es_0 < Ee_0 \tag{4.3}$$

Alors l'événement $\{A_n\}$ est récurrent positif. Cela signifie que, sous la condition (4.3) la relation suivante est vraie

$$E\theta_k \leq c < \infty, \qquad k \geq 1, \tag{4.4}$$

où la constante c dépend des fonctions de distribution de s_0 et e_0 en général. Notons que l'inégalité (4.3) découle de

$$\mathbb{P}(s_0 < e_0) > 0, \tag{4.5}$$

Cet exemple montre que le processus $\{w_n\}$ est régénératif dans le sens de Smith, c'est-à-dire, les cycles de régénération sont indépendants.

4.3 File d'attente multiserveurs

Considérons un système de files d'attente $GI/GI/N$ (avec N serveurs), pour la description de ce système on utilise les équations Kiefer-Wolfowitz :

$$w_{n+1} = V\,(w_n + \delta s_n - Ie_n)_+ , \qquad n \geq 0, \tag{4.6}$$

Là aussi, $\{s_n\}$ et $\{e_n\}$ représentent respectivement les durées de service et l'inter-arrivées des clients, et $w_n = (w_{n1}, ..., w_{nN})$ est un vecteur des durées d'attente par rapport au $n^{\text{ème}}$ client. $w_{n1} \leq ... \leq w_{nN}$, et $V(.)$ est un opérateur qui ordonne les éléments de $(.)$ dans l'ordre croissant, $\delta = (1, 0, ..., 0)$, $I = (1, 1, ..., 1)$.

Si $\{s_n\}$, $\{e_n\}$ se composent de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, alors il est possible de définir des événements régénératifs pour ce système. Très souvent, on tente d'élargir la construction précédente pour le cas multiserveur de la manière suivante :

Soit

$$A_n = \{w_n = (0, 0, ..., 0)\} \tag{4.7}$$

Evidemment, il s'agit d'un événement régénératif au sens de Smith. Pour que ces événements soient récurrents positifs, nous devons imposer la condition d'ergodicité :

$$Es_0 < NEe_0 \tag{4.8}$$

Mais, en général, cette condition n'est pas suffisante. Nous devons exiger de plus que

$$\mathbb{P}(s_0 < e_0) > 0 \tag{4.9}$$

Notons qu'il est possible de démontrer que sous les conditions (4.8) et (4.9) les événements $\{A_n\}$ construits par la formule (4.7) sont récurrents positifs [6].

Cette construction n'est pas intéressante car elle exige une condition supplémentaire (4.9).

Il est bien connu (voir Borovkov [3], Kalashnikov [8], Foss [5], et Kalashnikov Rachev [9]) qu'il est possible d'éliminer condition (4.9) si l'on utilise la régénération dans le sens de S. Asmussen et H. Thorisson.

Fixons un entier $L > 0$ et considérons les événements

$$B_n(\Delta, \sigma, \varepsilon) = \{s_j - Ne_j \leq -\Delta, s_j \leq \sigma, e_j \geq \varepsilon, n - L \leq j < n\} \tag{4.10}$$

$$C_n(u) = \{w_{nN} \leq u\} \tag{4.11}$$

Où $\Delta, \sigma, \varepsilon$ et u sont des constantes positives. Il est possible de démontré qu'il existe un nombre entier $L > 0$ tel que les valeurs de $w_n (n \geq L)$ calculées à l'aide de l'équation (4.6) ne dépend pas de $w_0, ..., w_{n-L}$, (mais uniquement de $e_{n-L}, ..., e_{n-1}$ et de $s_{n-L}, ..., s_{n-1}$[6], dans un sens algébrique étant donné la réalisation de l'événement

$$A_n = C_{n-L}(u) \cap B_n(\Delta, \sigma, \varepsilon) \tag{4.12}$$

En fait, il s'agit d'une conséquence de l'équation Kiefer-Wolfowitz. évidemment la constante L dépend de u, Δ, σ et ε, et il est possible de donner une estimation correspondant(voir Kalachnikov et Rachev [9]).

Il est convenable de nommer A un "événement renouvelable". Ecrivons

$$I(A) = \begin{cases} 1 & \text{si l'événement A survient, et} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.13}$$

Si on prend

$$R(0) = 0$$

,

$$R(1) = min\{k : I(A_k) = 1\}, \tag{4.14}$$

$$R(n+1) = min\{k : k > R(n) + L, I(A_k) = 1\}. \tag{4.15}$$

Alors la suite $R(n)$, "des instants de renouvellement" est un processus de renouvellement, c'est à dire les variables aléatoires $\theta_n = R(n) - R(n-1)$ sont indépendantes et identiquement distribuées ($\forall n > 1$). Par ailleurs, la condition d'ergodicité (refsafeq8) implique que $E\theta_1 < \infty$. Donc, nous sommes parvenus à éliminer la condition (4.9) et nous avons obtenu un processus régénératif sans elle.

4.4 Conclusion

Dans ce travail, nous avons présenté une construction des points de régénération pour les deux modèles de files d'attente à serveur unique $(GI/GI/1)$ et multiserveurs $(GI/GI/N)$. Pour le modèle $GI/GI/1$ les durées d'attente forment un processus régénératif avec l'indépendance entre les cycles de régénération. Par contre pour le deuxième modèle, il existe une dépendance entre les cycles de régénération, le processus régénératif est obtenu alors, on utilisant la généralisation de S. Asmussen et H. Thorisson.

Bibliographie

[1] S. Asmussen, *Appfied Probability and Queues* (Wiley, 1987).

[2] S. Asmussen and S. Foss, *Renovation, regeneration and coupling in multiserver queues in continuous time*, Preprint No. 1990-2, Dept. of Math., Chalmers Univ. of Technology, The University of GöSteborg (1990), to appear in Ann. Appl. Prob.

[3] A. Borovkov, *Asymptotic Methods in Queueing Theory* (Nauka, Moscow, 1980) (in Russian). (English translation : Wiley, 1984).

[4] A. Borovkov, *Limit theorems for queueing networks I*, Theory Prob. Appl. 31 (1986) 474-490.

[5] S. Foss, *The method of renovation events and its applications in queueing theory, Semi-Markov Models. Theory and Application*, Proc. 1-st Int. Symp. on Semi-Markov Processes, Brussel (1984) (Plenum, 1986) pp. 337-350.

[6] S.G. Foss and V. Kalashnikov, *Regeneration and renovation in queues*, Queueing Systems 8 (1991) 211-224.

[7] V. Kalashnikov, *Qualitative Analysis of Complex Systems Behaviour by Test Functions Method* (Nauka, Moscow, 1978) (in Russian).

[8] V. Kalashnikov, *Stability estimates for renovative processes*, Eng. Cybern. 17 (1980) 85-89.

[9] V. Kalashnikov and S. Rachev, *Mathematical Methods for Construction of Queueing Models* (Wadsworth and Brooks/Cole, 1990).

[10] H. Thorisson, *The coupling of regenerative processes*, Adv. Appl. Prob. 15 (1983) 531-561.