Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 13, 2014, pp. 71 - 75

11

Sur le Modèle d'attente $M/G/1$ avec rappels et clients découragés

D. ZIREM[a], M. BOUALEM[b], et D. AÏSSANI[c]

Université d'Alger 3
[a] email : ziremdjamila@yahoo.fr
[b] email : robertt15dz@yahoo.fr
[c] email : lamos_bejaia@hotmail.com

Résumé Dans ce travail, nous nous intéressons à l'étude du modèle d'attente $M/G/1$ avec rappels et clients découragés ayant une distribution générale des temps inter-rappels. Pour ce faire, nous appliquons la méthode des variables supplémentaires. Particulièrement, nous avons obtenu quelques mesures de performance essentielles ainsi que la condition d'ergodicité du modèle considéré.

Mots clés : Modèles d'attente avec rappels, pannes, clients impatients, variables supplémentaires.

11.1 Introduction

Les systèmes de files d'attente avec rappels apparaissent dans beaucoup de domaines tels que : les réseaux téléphoniques, les réseaux informatiques et télécommunications. Ces systèmes sont caractérisés par le fait que les clients qui trouvent tous les serveurs occupés ou non disponibles à leur arrivée, doivent quitter immédiatement la zone de service et rappeler ultérieurement. Par exemple, dans la transmission de données, un paquet transmis de la source à la destination peut être retourné et le processus doit se répéter jusqu'à ce que le paquet soit finalement transmis. Les modèles d'attente avec rappels sont les modèles les plus étudiés par les spécialistes. Il existe une littérature abondante sur ses diverses propriétés voir [1], [2], [3], [4], [6], [7]. Dans ce travail nous avons tenu compte des clients impatients qui refuse d'entrer dans la file d'attente car elle a atteint une certaine longueur qui les décourages,ce qui engendre une perte pour les fournisseurs de services. A ce sujet, une littérature très riche a été développée [8]. Dans notre travail, nous avons étudié le modèle d'attente $M/G/1$ avec rappels et clients découragés ayant une distribution générale des inter-rappels. Pour ce faire, nous appliquons la méthode des variables supplémentaires. Quelques mesures essentielles de performance ainsi que la condition d'ergodicité du modèle considéré ont été obtenues.

11.2 Exemple modélisé par les files d'attente avec rappels

11.2.1 (Problème du répondeur automatique)

On considère dans un centre d'information un seul serveur et un seul téléphone avec un répondeur automatique. Si un client appelle et trouve ce serveur occupé, le client choisit de laisser un message avec une discipline FCFS ou bien quitte le système. Ainsi, tous les appels viennent à la première source, tandis que les messages enregistrés forment une file d'attente avec rappels dans le répondeur. Quand le serveur est libre, il commence à contacter le premier qui a appelé, sauf si un client de l'extérieur appelle le centre avant de rétablir le contact avec ce dernier. Le serveur tombe en panne (ou interrompu) durant le service, pendant le temps de réparation le téléphone est engagé avec le client en service (réservé), dans ce cas le client peut attendre en ligne ou bien devient impatient et commence d'autre tâches et occasionnellement vérifie si le serveur a repris. Après réparation le client en attente commence immédiatement son service, lorsque le client fait d'autres tâches le serveur est retardé quelque moment, car celui-ci ignore si le serveur est en marche ou non.

11.3 Description du modèle

On considère un système de files d'attente à un seul serveur où les clients primaires arrivent dans le système selon un processus de Poisson de taux λ. Si un client arrive et trouve le serveur libre, il est servi immédiatement et quitte le système après la complétion de son service. Sinon, si le serveur est occupé où en panne, il rejoint l'orbite avec une probabilité p, ou quitte le système sans être servi avec une probabilité $1-p$. Le client qui se trouve en tête de l'orbite rappel, s'il trouve le serveur occupé ou en panne, décide de retourner en orbite avec une probabilité q ou de quitter le système avec une probabilité $1-q$. Nous supposons que les temps inter-rappels sont régis par une fonction de répartition $A(x)$, de densité $a(x)$ et de transformée de Laplace-Stieldjes $L_A(s)$.
Les temps de service des clients sont indépendants et identiquement distribués avec une distribution générale $B(x)$, de densité $b(x)$, de transformée de Laplace-Stieldjes $L_B(s)$ et des deux premiers moments β_1, β_2.
Nous supposons que le serveur est sujet à des pannes actives et poissonniennes du paramètre μ. Si le serveur tombe en panne, la réparation commence immédiatement. La durée de réparation est de distribution quelconque $C(x)$, de densité $c(x)$, de transformée de Laplace-Stieldjes $L_C(s)$ et des deux premiers moment γ_1 et γ_2. Le client dont le service est interrompu choisit de rester devant le serveur avec une probabilité r, ou bien rejoindre l'orbite service avec une probabilité $1-r$. Une fois la réparation achevée le serveur reprend

le service du client. Le serveur n'est pas autorisé à accepter de nouveaux clients jusqu'à ce que le client en service quitte le système définitivement.
Dans le cas où le client est en orbite service, à ce moment le serveur n'accepte pas d'autres clients jusqu'à ce qu'il termine avec ce dernier, dans ce cas le serveur est réservé. Ce temps aléatoire est de loi générale de fonction de répartition $D(x)$, de densité $d(x)$, de transformée de Laplace Stieldjes $L_D(s)$ et les deux premiers moments définis par η_1, η_2. Les durées de réservation sont indépendantes et identiquement distribuées.
Le serveur est dit bloqué s'il est occupé ou en réparation. Les durées de réparations sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées. Les temps successifs des inter-rappels, de service, de réparation, sont supposés être mutuellement indépendants.

11.4 Les états du système

L'état du système à l'instant t peut être décrit par le processus suivant.

$$\{X(t), t \geq 0\} = \{(J(t), J^*(t), N(t), \xi_0(t), \xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t)\},$$

où
- $J(t)$: Indique l'état du serveur,

$$J(t) = \begin{cases} 0, \text{ si le serveur est libre à l'instant } t\,; \\ 1, \text{ si le serveur est occupé par un client à l'instant } t\,; \\ 2, \text{ si le serveur est en panne à l'instant } t\,; \\ 3, \text{ si le serveur est réservé à l'instant } t. \end{cases}$$

- $J^*(t)$: Représente l'état du client après une panne,

$$J^*(t) = \begin{cases} 0, \text{ si le client en service reste à la position de service à l'instant } t\,; \\ 1, \text{ si le client en service entre en orbite de service à l'instant } t. \end{cases}$$

- $N(t)$: Désigne le nombre de clients en orbite à l'instant t.
- $\xi_0(t)$: Temps de rappel écoulé du client en orbite à l'instant t si $J(t) = 0$ et $N(t) > 0$.
- $\xi_1(t)$: Durée écoulée du service des clients à l'instant t si $J(t) = 1$, $J(t) = 2$ où $J(t) = 3$.
- $\xi_2(t)$: Durée écoulée de réparation à l'instant t si $J(t) = 2$, $J^*(t) = 0$ où $J^*(t) = 1$.
- $\xi_3(t)$: Représente la durée écoulée de réservation à l'instant t si $J(t) = 3$.

Les taux de complétion conditionnels pour les rappels des clients, le service des clients, les temps de réparation et la réservation sont donnés respectivement par :
$\alpha(\omega) = \frac{a(\omega)}{1-A(\omega)}$, $\beta(x) = \frac{b(x)}{1-B(x)}$, $\gamma(y) = \frac{c(y)}{1-C(y)}$ et $\eta(\tau) = \frac{d(\tau)}{1-D(\tau)}$.

11.5 Principaux résultats

On appliquons la méthode de la variable supplémentaire on obtient la condition d'ergodicité ainsi que quelques mesures de performances.

- La condition de stabilité du système est donnée par :

$$p\lambda\beta_1\{1+\mu[(1-r)\eta_1+\gamma_1]\} < 1-q+qL_A(\lambda)$$

- La fonction génératrice du nombre de clients dans l'orbite, est donnée par :

$$\phi(z)=\frac{[(1-q+qL_A(\lambda))(1-(1-p+pz)k(z))-pL_A(\lambda)z(1-k(z))]P_{00}}{p(1-q+qL_A(\lambda))(1-z)K(z)-z(1-K(z))}.$$

- La fonction génératrice du nombre de clients dans le système est donnée par :

$$\pi(z)=\frac{[(1-q+qL_A(\lambda))(z-(z-p+pz)k(z))-pL_A(\lambda)z(1-k(z))]P_{00}}{p(1-q+qL_A(\lambda))(1-z)K(z)-z(1-K(z))}.$$

- La disponibilité du serveur est donnée par :

$$A_v(t)=\frac{(1-q+qL_A(\lambda))(1+\lambda\beta_1)-L_A(\lambda)K'(1)}{(1-q+(q-p)L_A(\lambda))(1+K'(1))+pL_A(\lambda)}.$$

- La fréquence de panne du serveur est :

$$F_f(t)=\frac{\mu\lambda\beta_1(1-q+qL_A(\lambda))}{(1-q+(q-p)L_A(\lambda))(1+K'(1))+pL_A(\lambda)}.$$

11.6 Conclusion

Dans ce travail nous nous sommes basées sur le travail de Wu et al voir [8], pour étudiée le modèle d'attente $M/G/1$ avec rappels et clients découragés. Notre contributions consiste a évalué les performances de ce modèle en considérant la politique de rappels ayant une distribution générale des inter-rappels, en utilisant l'approche basée sur la variable supplémentaire au lieu de distribution classique pour les inter-rappels et la méthode de la chaîne de Markov incluse dans [8].

11.7 Réferences

[1] A. Aissani (1988). On the $M/G/1/1$ queueing system with repeated orders and unreliable server. Journal of Technology .

[2] A. Aissani and J.R. Artalejo (1998). On the single server retrial queue subject to breakdowns. Queueing Systems.

[3] J. R. Artalejo, A. Gómez-Corral (2008). Retrial queueing systems : A Computational approach, Springer.

[4] I. Atencia and P. Moreno (2005). A single retrial queue with general retrial times and Bernoulli schedule. Applied Mathematics and Computation.

[5] M.Boualem (2009), Inégalités pour les systèmes de file d'attente avec rappels, thèse de doctorat en Mathématiques, Université de Bejaia.

[6] G.I.Falin 1997,G.I.Falin and J.G.C.Templeton (1997),Retrial Queue, Chapman and Hall, London.

[7] T.Kernane (2007), Stabilité de modèle de file d'attente, thèse de doctorat en Mathématiques (probabilités et statistiques), USTHB.

[8]X. Wu, P. Brill and M. Hlynka and J. Wang (2005). An $M/G/1$ retrial queue with balking and retrial. International Journal of Operational Research.