Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 13, 2014, pp. 65 - 69

10

Méthode du noyau dans l'analyse de la stabilité forte du modèle de risque classique : Approche par processus régénératif

A. TOUAZI[a], Z. BENOUARET[b], S. ADJABI[c] et D. AÏSSANI[d]

Unité de recherche LaMOS (Laboratoires de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes)
Université de Bejaia, Bejaia 06000, Algérie
Tél. (213) 34 21 51 88,
[a] email : `touazi_atik@hotmail.fr`
[b] email : `benouaret z@yahoo. fr`
[c] email : `adjabi@hotmail.com`
[d] email : `lamos_bejaia@hotmail.com`

Résumé Dans ce travail, on s'intéresse au cas où la loi de probabilité des montants des réclamations, dans l'analyse de stabilité du modèle de risque Poisson composé, est inconnue et doit être estimée par la méthode du noyau. En considérant les bornes de stabilité présentées par V. KALASHNIKOV par la théorie des processus régénératif , nous présentons les étapes de simulation pour évaluer numériquement la borne de déviation des probabilités de ruine entre le modèle de risque idéale et le modèle de risque perturbé.

Mots clés : Estimation non paramétrique, Modèles de risque, Probabilités de ruine, Stabilité forte, Processus Régénératif.

10.1 Introduction

Le problème de la ruine d'une compagnie d'assurance constitue le sujet central de la théorie de risque. Les premiers développements théoriques remontent au début du vingtième siècle et sont dus à des actuaires scandinaves, comme Harald Cramér et Filip Lundberg. Par la suite, tous les grands noms de l'actuariat moderne, comme Hans Buhlmann, Hans Gerber,... ont étudié en détail le problème de la ruine.

La méthode de stabilité forte, qui a été élaborée par Aïssani et Kartashov (1983), connaît un large champs d'application en théorie de ruine après le travail de Kalashnikov (2000), où l'auteur a présenté de nouvelles bornes de stabilité forte des probabilités de ruine par une approche basée sur la théorie des chaînes de Markov. De plus, pour traiter le cas de réclamation large, il a présenté une autre borne en utilisant l'approche basée sur la théorie des processus régénératifs.

Ce travail consistera à étudier, en utilisant l'estimation non paramétrique par la méthode du noyau, la stabilité des probabilités de ruine. Sachant qu'une étude similaire, avec l'approche par chaîne de Markov, est déjà présenté dans l'atelier précédente AMS 2013.

10.2 Résultat de stabilité des modeles de risque par processus régénératifs.

10.2.1 Description du modèle de risque classique.

Le modèle de risque classique à une dimension est décrit par le processus suivant :

$$X(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i, \qquad t \geq 0, \tag{10.1}$$

où :

- u est le surplus initial.
- c représente le taux de prime constant par unité de temps.
- $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson de paramètre λ représentant le nombre de réclamations (sinistres).
- $\{Z_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variable aléatoire indépendante et identiquement distribuées où Z_i est Le montant du $i^{ème}$ sinistre, de fonction de distribution F et de moyenne μ finie.

Parmi différentes mesures de risque, nous nous intéressons à la probabilité de ruine qui représente la probabilité que la compagnie d'assurance tombe en état d'insolvabilité.

Définition 10.1 *Nous appelons probabilité de ruine en temps fini t, la fonction donnée par*

$$\Psi(u,t) = \mathbb{P}(\exists s \in [0,t]/X(s) < 0), \quad \forall u \geq 0.$$

– *En temps infini, elle est définie comme suit :*

$$\Psi(u,\infty) = \mathbb{P}(\exists s \geq 0/X(s) < 0) = \Psi(u), \quad \forall u \geq 0.$$

Malheureusement, l'évaluation des probabilités de ruine n'est exacte que dans quelques modèles. Dans ce sens, la plus part des résultats obtenus sur cette caractéristique sont seulement des approximations. D'où l'intérêt d'obtenir des bornes de stabilité.

10.2.2 Borne de stabilité des probabilités de ruine

Le modèle de risque classique est stable par rapport à la fonction poids $v(x) = e^{\epsilon x}$,$x \geq 0$ [5]. Notons par $a = (\lambda, c, F)$, (respectivement $a' = (\lambda', c', F')$) le vecteur de paramètres

du modèle de risque idéale (respectivement perturbé).
L'inégalité de stabilité obtenue par Kalashnikov (2000), en utilisant les processus régénératif, est donnée par la formule suivante :

$$\sup_n \mid \Psi_n - \Psi_n^{'} \mid_v = \sup_n \mid G_n - G_n^{'} \mid_v \leq \frac{(1 + \frac{\beta(\epsilon)}{1-\rho})(\beta(\epsilon)\mu_A + \alpha \mid F - F^{'} \mid_v)}{1-\rho}. \tag{10.2}$$

où :

$$\beta(\epsilon) = \mathbb{E}\exp(\epsilon Z)\,;$$
$$\mu_A = \frac{\beta(\epsilon)}{\epsilon + \min(\frac{\lambda}{c}, \frac{\lambda^{'}}{c^{'}})} \mid \frac{\lambda}{c} - \frac{\lambda^{'}}{c^{'}} \mid ;$$
$$\alpha = \frac{\lambda^{'}}{\epsilon c^{'} + \lambda^{'}}\,;$$

et $\rho(\epsilon) = \mathbb{E}\exp(\epsilon(Z - c\,\theta))$, θ est une variable aléatoire qui représente les inter-arrivées des réclamations selon une loi exponentielle de paramètre λ.
Notons par Γ la borne supérieur donnée par l'inégalité de stabilité (10.2),

$$\Gamma = \frac{(1 + \frac{\beta(\epsilon)}{1-\rho})(\beta(\epsilon)\mu_A + \alpha \mid F - F^{'} \mid_v)}{1-\rho}. \tag{10.3}$$

Perturbation du montant de réclamation

Dans cette étude, nous tenons seulement compte de la perturbation de la loi des montants de réclamation. C'est-à-dire, les paramètres λ et c sont les mêmes pour les deux modèles (idéal et perturbé).
D'où, $\mu_A = 0$ et la borne de stabilité devient :

$$\sup_n \mid \Psi_n - \Psi_n^{'} \mid_v = \sup_n \mid G_n - G_n^{'} \mid_v \leq \Gamma = \frac{(1 + \frac{\beta(\epsilon)}{1-\rho})\alpha \mid F - E_\mu \mid_v}{1-\rho}. \tag{10.4}$$

où : F est la distribution inconnue du montant de réclamation du modèle perturbé et E_μ est la distribution exponentielle du montant de réclamation du modèle idéal.

10.3 Méthode du noyau pour l'estimation de la densité du montant de réclamation

Soit $X_1, ..., X_n$ un n-échantillon issu d'une variable aléatoire X de la fonction de densité inconnue f sur l'ensemble $\Re \subseteq R$ borné au moins d'un côté. Les estimateurs à noyau associé, asymétrique et continu sont de la forme :

$$f_h(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_{x,h}(X_i). \tag{10.5}$$

où h est le paramètre de lissage et $K_{x,h}$ est le noyau associé continu asymétrique.
Le noyau associé gamma a été introduit par Chen (200) pour estimer des densités à support $\Re = [0, \infty[$. Deux classes de noyaux ont été proposées :

$$K_{GAM(\frac{x}{h}+1,h)}(u) = \frac{u^{\frac{x}{h}} exp(\frac{-u}{h})}{h^{\frac{x}{h}+1}\Gamma(\frac{x}{h}+1)}, \tag{10.6}$$

où $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} exp(-t)t^{\alpha-1}dt$. Son estimateur associé est donné par :

$$f_h^{GAM}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_{\frac{x}{h}+1,h}(X_i). \tag{10.7}$$

La deuxième classe est le noyau Gamma modifié qui est donné comme suit :

$$K_{GAM1(\rho_h(x),h)}(u) = \frac{u^{\rho_h(x)-1} exp(\frac{-u}{h})}{h^{\rho h(x)}\Gamma(\rho h(x))}, \tag{10.8}$$

où :

$$\rho_h(x) = \begin{cases} \frac{x}{h} & \text{si} \quad x \geq 2h, \\ \frac{1}{4}(\frac{x}{h})^2 + 1 & \text{si} \quad 0 \leq x < 2h. \end{cases} \tag{10.9}$$

L'estimateur à noyau gamma modifié est donné par :

$$f_h^{GAM1}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_{\rho_h(x),h}(X_i). \tag{10.10}$$

Afin de faire une comparaison avec le noyau Gamma, nous utilisons le noyau Réciproque-Inverse-Gaussien qui a été intrduit par Scaillet (2004) et qui a la forme suivante :

$$K_{RIG(\frac{1}{x-h},\frac{1}{h})}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h u}} exp(\frac{-(x-h)}{2h}(\frac{u}{x-h} - 2 + \frac{x-h}{u})); \tag{10.11}$$

l'estimateur de f est donné comme suit :

$$f_h^{RIG}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_{RIG(\frac{1}{x-h},\frac{1}{h})}(X_i). \tag{10.12}$$

10.4 Approximation du modèle de risque idéal par le modèle de risque perturbé

On veut appliquer la méthode du noyau pour estimer numériquement la proximité des modèles de risque idéal et perturbé, en évaluant l'erreur définie dans (10.4) entre les probabilités de ruines des deux modèles lors de l'application de la méthode de stabilité forte. Pour cela, nous développons un algorithme de simulation qui contient les étapes suivantes :

1. Générer un n-échantillon de loi de probabilité F du montant de réclamation, supposé inconnue.
2. Estimer la densité f par f_h,
3. Introduire le taux moyen d'arrivé des sinistres λ .
4. Déterminer le montant moyen de réclamation $1/\mu \leftarrow \int_0^\infty x f_h(x)dx$.
5. Verifier si $c > \lambda(\frac{1}{\mu})$, sinon la ruine est certaine.
6. Générer une valeur de ϵ entre 0 et $min\{\frac{1}{\mu}, \frac{c-\lambda\mu}{c\mu}\}$.
7. Calculer $\rho(\epsilon) = E(e^{\epsilon(Z-c\theta)})$.
8. Calculer l'erreur $\Gamma = \frac{(1+\frac{\beta(\epsilon)}{1-\rho})\alpha|F-E_\mu|_v}{1-\rho}$.

Nous souhaitons comparer entre les estimateurs avec les différents noyaux proposés afin de choisir le meilleur estimateur pour la densité des montants de réclamation.

Références

1. S. Asmussen. *Ruin Probabilities*, Word Scientific : Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 2000.
2. F. Enikeeva, V. Kalashnikov and D. Rusaityte. *continuity estimates for ruin probabilities*, Scand. Actuar. J., 1, 18-39, 2001.
3. N. V. Kartashov. *Strong Stable Markov Chains*, VSP, Utrecht, 1996.
4. D. Aissani and N. V. Kartashov. *Ergodicity and stability of Markov chains with respect to operator topology in the space of transition kerne*l, Compte Rendu Academy of Sciences U. S. S. R, ser. A, 11, 3-5, 1983.
5. V. Kalashnikov. *The stability Concept for stochastic risk models*, Working Paper Nr 166. Lab. of Actuarial Mathematics. University of Copenhagen, 2000.
6. D. Rusaityte. *Stability bounds for ruin probabilities in a Markov modualited risk model with investments*, Laboratory of Actuarial Mathematics, university of Copenhagen. Working Paper Nr. 178, 2001
7. Z. Benouaret and D. Aissani. *Strong Stability in a Two-Dimensional Classical Risque Model with Independent Claims*, Scand. Actuar. J. 2, 83-93, 2010.
8. SX. Chen. *Gamma Kernel estimators for density functions*, Annals of the Institute of Statistical Mathematics 52, 471-480, 2000.
9. O. Scaillet. *Density estimation using inverse and reciprocal inverse Gaussian kernels*, Journal of Nonparametric Statistics, 16, 217-226, 2004.
10. P. Malec and M. Schienle. *Nonparametric Kernel Density Estimation Near the Boundary*, SFB 649 'Economic Risk' Berlin, 2012.