Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 13, 2014, pp. 37 - 41

6

Régénération et renouvellement dans la théorie des files d'attente

S. HOCINE[a], D. AÏSSANI[b] et Z. BENOUARET[c]

Unité de recherche LaMOS (Laboratoires de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes)
Université de Bejaia, Bejaia 06000, Algérie
Tél. (213) 34 21 51 88,
[a] email : hsafia4@gmail.com
[b] email : lamos_bejaia@hotmail.com
[c] email : benouaret_z@yahoo. fr

Résumé Les Processus régénératifs jouent un rôle majeur dans l'application des probabilités. En théorie des files d'attente, les événements régénératifs sont souvent liés à une file vide ou à l'arrivée des clients dans un système vide. L'objectif de ce travail est de présenté une construction des points de régénération pour les deux modèles de files d'attente à serveur unique $GI/GI/1$ et multiserveurs $GI/GI/N$, en se basant sur le travail de Foss and V. Kalashnikov (Regeneration and renovation in queues).

Mots-clés. Régénération, Renouvellement, Système de file d'attente, Système multiserveur, Temps d'attente.

6.1 Introduction

La notion de régénération est très importante en théorie des probabilités et , en particulier, en théorie des files d'attente. Elle est utilisée dans l'analyse qualitative des systèmes d'attente (Ergodicité, stabilité, la convergence en régime stationnaire) et également dans l'estimation quantitative, y compris la simulation (caractéristiques stationnaires, l'estimation de la stabilité et le taux de convergence). Étant introduite par W. L. Smith, cette notion a été généralisée par Thorisson [10] et Asmussen [1] en considérant la dépendance entre les cycles de régénération. Cette généralisation est très importante pour la théorie des files d'attente car elle conserve tous les résultats importants et permet d'étudier une grande classe de files d'attente (en comparaison avec la régénération de Smith).

Ces deux approches de régénération permettent donc de construire des événements régénératifs pour d'autres systèmes d'attente (files d'attente multiserveurs et multi-phases). En construisant d'abord les points de régénération, il est possible d'appliquer tous les résultats connus sur les processus de régénération (estimations du taux de convergence, estimations de la stabilité) afin d'étudier le modèle de file d'attente correspondant. Un exemple sur cette étude a été développé dans Asmussen et Foss [2] où la construction générale proposée est utilisée dans l'obtention des résultats d'ergodicité.

En théorie des files d'attente, les événements régénératifs sont souvent liés à une file vide ou à l'arrivée des clients dans un système vide.

6.2 File d'attente à serveur unique

Considérons la file d'attente $GI/GI/1/\infty$ qui satisfait l'équation de Lindley :

$$w_{n+1} = (w_n + s_n - e_n)_+ , \qquad n \geq 0, \tag{6.1}$$

où $(.)_+ = max\,(0, .)_+$.
$\{s_n\}$ et $\{e_n\}$ sont des suites de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées qui représentent respectivement les durées de service et l'inter-arrivées des clients.
La chaine $\{w_n\}$ représente la durée d'attente.
Étudions d'abord l'initialisation de la durée de service et de l'inter-arrivée à 0. Alors :

$$A_n = \{w_n = 0\}, \tag{6.2}$$

est un événement régénératif.
Notons par $R(k)$ l'instant d'occurrence du $k^{\text{ème}}$ événement régénératif.
On pose

$$\theta_k = R(k) - R(k-1), \quad k \geq 1, \quad R(0) = 0.$$

Si :

$$Es_0 < Ee_0, \tag{6.3}$$

alors l'événement $\{A_n\}$ est récurrent positif. Cela signifie que, sous la condition (6.3), la relation suivante est vérifiée :

$$E\theta_k \leq c < \infty, \qquad k \geq 1, \tag{6.4}$$

où la constante c dépend, en général, des fonctions de distribution de s_0 et de e_0.
Notons que l'inégalité (6.3) découle de la relation suivante

$$\mathbb{P}(s_0 < e_0) > 0. \tag{6.5}$$

Cet exemple montre que le processus $\{w_n\}$ est régénératif dans le sens de Smith, c'est-à-dire, les cycles de régénération sont indépendants.

6.3 File d'attente multiserveurs

Considérons un système de files d'attente $GI/GI/N$ (avec N serveurs). Pour la description de ce système, on utilise les équations de Kiefer-Wolfowitz :

$$w_{n+1} = V\left(w_n + \delta s_n - I e_n\right)_+, \qquad n \geq 0. \tag{6.6}$$

On garde les mêmes notations précédentes pour les durées de service et l'inter-arrivées des clients avec
$w_n = (w_{n1}, \ldots, w_{nN})$ est un vecteur des durées d'attente du $n^{\text{ème}}$ client où $w_{n1} \leq \ldots \leq w_{nN}$, $V(.)$ est un opérateur qui ordonne les éléments dans l'ordre croissant, $\delta = (1, 0, ..., 0)$ et $I = (1, 1, ..., 1)$.
Si les variables aléatoires des suites $\{s_n\}$ et $\{e_n\}$ sont indépendantes et identiquement distribuées, alors il est possible de définir des événements régénératifs pour ce système. Très souvent, on tente d'élargir la construction précédente pour le cas multiserveur de la manière suivante :
Soit

$$A_n = \{w_n = (0, 0, \ldots, 0)\}, \tag{6.7}$$

évidemment, il s'agit d'un événement régénératif au sens de Smith. Pour que ces événements soient récurrents positifs, nous devons imposer la condition d'ergodicité suivante :

$$Es_0 < NEe_0. \tag{6.8}$$

Cependant, en général, cette condition n'est pas suffisante. Nous devons alors vérifier la satisfaction de la relation suivante :

$$\mathbb{P}(s_0 < e_0) > 0. \tag{6.9}$$

Notons qu'il est possible de démontrer que sous les conditions (6.8) et (6.9), les événements $\{A_n\}$ construits par la formule (6.7) sont récurrents positifs (cf. [6]).
Cette construction n'est pas intéressante car elle exige une condition supplémentaire (6.9). Il est bien connu (voir Borovkov [3], Kalashnikov [8], Foss [5] et Kalashnikov Rachev [9]) qu'il est possible d'éliminer la condition (6.9) si l'on utilise la régénération dans le sens de S. Asmussen et H. Thorisson.
Fixons un entier $L > 0$ et considérons les événements suivants :

$$B_n(\Delta, \sigma, \varepsilon) = \{s_j - N e_j \leq -\Delta, s_j \leq \sigma, e_j \geq \varepsilon, n - L \leq j < n\} \tag{6.10}$$

$$C_n(u) = \{w_{nN} \leq u\}; \tag{6.11}$$

où $\Delta, \sigma, \varepsilon$ et u sont des constantes positives.

Il est possible de démontrer qu'il existe un nombre entier $L > 0$ tel que les valeurs de $w_n(n \geq L)$ calculées à l'aide de l'équation (6.6) ne dépendent pas de $w_0, \ldots, w_{n-L}$, (mais uniquement de $e_{n-L}, \ldots, e_{n-1}$ et de $s_{n-L}, \ldots, s_{n-1}$, dans un sens algébrique étant donné la réalisation de l'événement : (cf. [5])

$$A_n = C_{n-L}(u) \cap B_n(\Delta, \sigma, \varepsilon). \tag{6.12}$$

En fait, il s'agit d'une conséquence de l'équation Kiefer-Wolfowitz. Évidemment la constante L dépend de u, Δ, σ et ε, et il est possible de donner une estimation correspondant(voir Kalachnikov et Rachev [9]).
Il est convenable de nommer A un "événement renouvelable". Notons

$$I(A) = \begin{cases} 1 & \text{si l'événement A survient,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{6.13}$$

En prenant

$$R(0) = 0,$$
$$R(1) = min\{k : I(A_k) = 1\} \tag{6.14}$$

et

$$R(n+1) = min\{k : k > R(n) + L, I(A_k) = 1\}, \tag{6.15}$$

la suite $R(n)$, "des instants de renouvellement" est un processus de renouvellement, c'est à dire les variables aléatoires $\theta_n = R(n) - R(n-1)$ sont indépendantes et identiquement distribuées ($\forall n > 1$). Par ailleurs, la condition d'ergodicité implique que $E\theta_1 < \infty$ (refsafeq8). Par conséquent, nous sommes parvenus à éliminer la condition (6.9) et nous avons obtenu un processus régénératif sans cette condition.

6.4 Conclusion

Dans ce travail, nous avons présenté une construction des points de régénération pour les deux modèles de files d'attente à serveur unique $GI/GI/1$ et multiserveurs $GI/GI/N$. Pour le modèle $GI/GI/1$, les durées d'attente forment un processus régénératif avec l'indépendance entre les cycles de régénération. Par contre pour le second modèle considéré, il existe une dépendance entre les cycles de régénération, le processus régénératif est obtenu en utilisant la généralisation de S. Asmussen et H. Thorisson.

Références

1. S. Asmussen, *Applied Probability and Queues*, Wiley, 1987.
2. S. Asmussen and S. Foss, *Renovation, regeneration and coupling in multiserver queues in continuous time*, , Frontiers Pure Appl. Probab. 1, 1-6, 1993.
3. A. Borovkov, *Asymptotic Methods in Queueing Theory*, Wiley, 1984.
4. A. Borovkov, *Limit theorems for queueing networks I*, Theory of Probability and its Applications, 1987, 31 :3, 413–427, 1986.
5. S. Foss, *The method of renovation events and its applications in queueing theory.* In : Semi-Markov Models. Theory and Application. Proc. 1-st Intern. Symposium on Semi-Markov Processes. (Brussel, 1984). Plenum Press, New York and London, 337-350, 1986.
6. S. G. Foss and V. Kalashnikov, *Regeneration and renovation in queues*, Queueing Sys. Theory Appl. 8, 211-224, 1991.
7. V. Kalashnikov, *Qualitative Analysis of Complex Systems Behaviour by Test Functions Method* (Nauka, Moscow, 1978) (in Russian).
8. V. Kalashnikov, *Stability estimates for renovative processes*, Engineering Cybernetics, 17, 85-89, 1980.
9. V. Kalashnikov and S. Rachev, *Mathematical Methods for Construction of Queueing Models*,Wadsworth and Brooks/Cole, 1990.
10. H. Thorisson, *The coupling of regenerative processes*, Adv. Appl. Prob. 15, 531-561, 1983.