Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 13, 2014, pp. 29 - 32

4

Stabilité des systèmes de files d'attente de type phase(PH)

Y. DJABALI[a], B. RABTA[b] et D. AÏSSANI[c]

Unité de recherche LaMOS (Laboratoires de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes)
Université de Bejaia, Bejaia 06000, Algérie
Tél. (213) 34 21 51 88,
[a] email : `dj.mina06@yahoo.fr`
[b] email : `brabta@yahoo.fr`
[c] email : `lamos_bejaia@hotmail.com`

Résumé L'approximation d'une distribution positive quelconque par une distribution de type phase est toujours possible car l'ensemble des distributions de type phase est dense dans l'ensemble des distributions positives. Dans ce travail nous avons étudié la stabilité forte de la chaîne de Markov induite des systèmes PH/M/1 et M/PH/1 après perturbation de la loi des arrivées et de la durée de service des systèmes GI/M/1 et M/G/1. En plus de l'affirmation qualitative, nous obtenons dans chaque cas une estimation de l'erreur d'approximation donnée par une borne supérieure de la norme de la déviation de la distribution stationnaire de la chaîne de Markov induite.

Mots clefs : Système de files d'attente de type phase (PH), Perturbation, Stabilité forte, Inégalité de stabilité.

4.1 Introduction

L'approximation d'une distribution positive quelconque par une distribution de type phase est toujours possible car l'ensemble des distributions de type phase est dense dans l'ensemble des distributions positives.

Théorème 4.1 ?? *L'ensemble des distributions de type phase PH est dense (au sens de la convergence faible) dans l'ensemble des distributions positives $\mathcal{P}$. D'une manière plus générale : pour toute distribution positive $F \in \mathcal{P}$ possédant un moment d'ordre p, $(\mu_F^{(P)})$ fini, il existe une suite de distributions $F_k \in PH$ telle que : $F_k \to F$ et $\mu_{F_k}^{(q)} \to \mu_F^{(q)}$ pour tout $q \leq p$.*

4.2 Stabilité forte dans le système $M/PH/1$

Considérons le système $(\bar{\Sigma})$ de files d'attente $M/G/1$ à un seul serveur, à capacité infinie et de discipline de service FIFO. Le nombre de clients dans le système $(\bar{\Sigma})$, juste après le départ du n^{ème} client, est donné par la chaîne de Markov $\bar{X} = \{\bar{X}_n,\ n = 0, 1 \ldots\}$ dont la matrice de transition est notée par $\bar{P} = (\bar{P})_{ij}$:

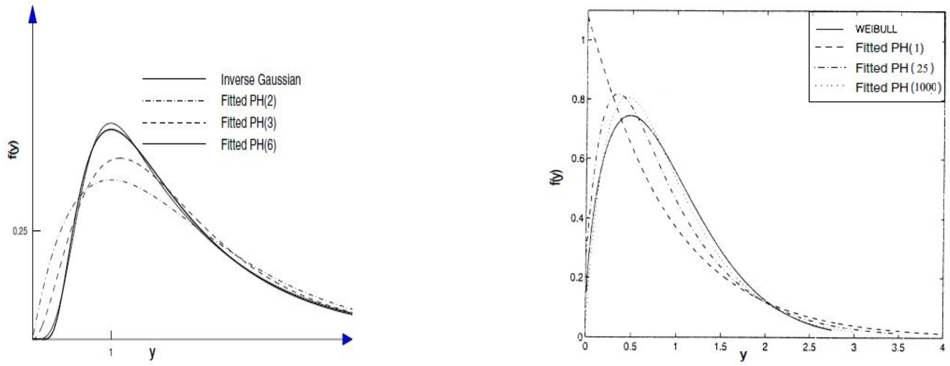

Figure 4.1. Exemples d'approximation

$$\bar{P}_{ij} = \begin{cases} \bar{f}_j & \text{si} \qquad i = 0, \\ \bar{f}_{j-i+1} & \text{si} \qquad 1 \leq i \leq j+1, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \tag{4.1}$$

avec :

$$\bar{f}_k = \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \, d\, F(t).$$

Considérons également le système $(\hat{\Sigma})$ de files d'attente $M/PH/1$, où la durée de service est distribuée selon une distribution de type phase PH de paramètres $(\overrightarrow{\tau}, T)$.

• **Matrice de transition :**

$$\hat{P}_{ij} = \begin{cases} \hat{f}_j & \text{si} \qquad i = 0, \\ \hat{f}_{j-i+1} & \text{si} \qquad 1 \leq i \leq j+1, \\ 0 & \text{ailleurs}\,; \end{cases} \tag{4.2}$$

avec :

$$\hat{f}_k = \frac{\overrightarrow{\tau}}{j!} \sum_{n \geq 0} \frac{T^n}{n!} \overrightarrow{\upsilon} \frac{1}{\lambda^{n+1}} \Gamma(j+n+1). \tag{4.3}$$

4.2.1 v-stabilité forte de la chaîne de Markov $\hat{X}$

- Montrons qu'il existe $\rho < 1$ tel que $Tv(i) \leq \rho v(i)$. En effet, on a :

$$\begin{aligned} Tv(i) &= \beta^i \Big(\frac{\overrightarrow{\tau}}{\beta\lambda(1-\beta)} \sum_{n \geq 0} \big(\frac{T}{\lambda(1-\beta)} \big)^n \overrightarrow{\upsilon} \Big), \\ &\leq \beta^i \Big(\frac{\overrightarrow{\tau}}{\beta\lambda(1-\beta)} \frac{1}{1 - \frac{T}{\lambda(1-\beta)}} \overrightarrow{\upsilon} \Big); \end{aligned}$$

d'où :

$$\rho = \frac{\overrightarrow{\tau}}{\beta\lambda(1-\beta)} \frac{1}{1 - \frac{T}{\lambda(1-\beta)}} \overrightarrow{\upsilon}. \tag{4.4}$$

4.2.2 Inégalités de stabilité

Soient $\hat{\pi}$ et $\bar{\pi}$, les distributions stationnaires des chaînes de Markov décrivant respectivement les états des systèmes $(\hat{\Sigma})$ et $(\bar{\Sigma})$. Alors, pour tout β, et sous la condition :

$$W(F, PH) < \frac{(1-\rho)}{\beta C}, \tag{4.5}$$

on a :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \beta^j |\bar{\pi}_j - \hat{\pi}_j| \leq \frac{\beta\big(1+\mathcal{G}(\beta)\big)\mathcal{G}(\beta)}{1-\rho-\beta\big(1+\mathcal{G}(\beta)\big)W(F,PH)} W(F,PH), \tag{4.6}$$

où : $\rho = \frac{\overrightarrow{\tau}}{\beta\lambda(1-\beta)} \frac{1}{1-\frac{T}{\lambda(1-\beta)}} \overrightarrow{\vartheta}$,
$\mathcal{G}(\beta) = \hat{\pi}_0 \frac{\beta-1}{\beta - H^*(\lambda(1-\beta))} H^*(\lambda(1-\beta))$, $\hat{\pi}_0 = 1 + \lambda\overrightarrow{\tau}T^{-1}e$, $\quad H^*(\lambda(1-\beta)) = \tau_0 + \overrightarrow{\tau}(\lambda(1-\beta)I - T)^{-1}\overrightarrow{\vartheta}$
$C = 1 + \mathcal{G}(\beta)$.

4.3 Stabilité forte dans le système $PH/M/1$

Description et notations relatives aux modèles :
Considérons le système $(\widetilde{\Sigma})$ de files d'attente $GI/M/1$

$$\widetilde{P}_{ij} = \begin{cases} \widetilde{d}_{i+1-j} = \int_0^{+\infty} \dfrac{(\mu t)^{i+1-j}}{(i+1-j)!} e^{-\mu t}\, dG(t) & \text{si} \quad 1 \leq j \leq i+1, \\ 1 - \sum\limits_{k=0}^{i} \widetilde{d}_k & \text{si} \quad j = 0, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \tag{4.7}$$

Considérons également le système (Σ) de files d'attente $PH/M/1$:

$$P_{ij} = \begin{cases} d_{i+1-j} = \frac{\overrightarrow{\tau}}{(i+1-j)!} \sum_{n\geq 0} \frac{T^n}{n!} \overrightarrow{\vartheta} \frac{1}{\mu^{n+1}} \Gamma(i+2-j+n) & \text{si} \quad 1 \leq j \leq i+1, \\ 1 - \sum\limits_{k=0}^{i} d_k & \text{si} \quad j = 0, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \tag{4.8}$$

4.3.1 v-stabilité forte de la chaîne de Markov X

- Montrons qu'il existe $\rho < 1$ tel que $Tv(i) \leq \rho v(i)$. En effet, on a :

$$Tv(i) = \sum_{j=1}^{i+1} \beta^j \frac{\overrightarrow{\tau}}{(i+1-j)!} \sum_{n\geq 0} \frac{T^n}{n!} \overrightarrow{\vartheta} \frac{1}{\mu^{n+1}} \int_0^{\infty} k^{i+1-j+n} e^{-k} dk,$$

$$\rho = \frac{\overrightarrow{\tau}}{\mu(\beta-1)} \frac{1}{1-\frac{T}{\mu(1-\frac{1}{\beta})}} \overrightarrow{\vartheta}. \tag{4.9}$$

4.3.2 Inégalités de stabilité

Soient π et $\widetilde{\pi}$, les distributions stationnaires des chaînes de Markov induites respectivement des systèmes (Σ) et $(\widetilde{\Sigma})$. Alors, pour tout β, et sous la condition

$$\|\Delta\|_v < \frac{1-\rho}{C},$$

on a :

$$\|\pi_j - \widetilde{\pi}_j\|_v \leq \|\Delta\|_v C \|\pi\|_v (1 - \rho - C\|\Delta\|_v)^{-1}, \tag{4.10}$$

où $\rho = \frac{\overrightarrow{\tau}}{\mu(\beta-1)} \frac{1}{1-\frac{T}{\mu(1-\frac{1}{\beta})}} \overrightarrow{\vartheta}$,
$C = 1 + \|\mathbf{1}\|_v \|\pi\|_v$
$\|\pi\|_v = \frac{1-\sigma}{1-\beta\sigma}$
où :
$-\mu\sigma^2 I + (\mu I - T + \tau_0\mu I)\sigma - (\tau_0\mu I - \tau_0 T + \tau I \overrightarrow{\vartheta}) = 0$

Références

1. D. Aïssani and N. V. Kartashov, *Ergodicity and stability of Markov chains with respect to operator topology in the space of transition kernels.* Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR (ser. A) 11,3–5, 1983.
2. S. Asmussen, *Applied probability and queues*, 2nd ed. Springer, New York, 2003.
3. B. Haverkort, *Approximate analysis of networks of PH/PH/1/K queues : Theory and tool support*, 3rd ed. Quantitative Evaluation of Computing and Communication Systems, pages 239–253, 1995.
4. G. Latouche and V. Ramaswami, *Introduction to Matrix Analytic Methods in Stochastic Modelling.* ASA-SIAM, Philadelphia PA, 1999.
5. M. Neuts, *Probability distributions of phase type.* In L. Amicorum and H. Florin, University of Louvain, pages 173–206, 1975.