Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 12, 2013, pp. 121 - 129

15

Monotonie de la Chaîne de Markov incluse du Système $M_1, M_2/G_1, G_2/1$ avec rappels à communication bidirectionnelle

L.M. ALEM, M. BOUALEM et D. AISSANI

Unité de recherche LaMOS (Laboratoires de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes)
Université de Bejaia, Bejaia 06000, Algérie
Tél. (213) 34 21 51 88,
email : alem_nanou@yahoo.fr

Résumé Les mesures de performance du système d'attente $M_1, M_2/G_1, G_2/1$ avec rappels à communication bidirectionnelle sont disponibles sous des formes explicites mais complexes (elles contiennent des transformées de Laplace et des expressions intégrales). Elles ne sont donc pas faciles à interpréter en pratique. Pour pallier à ces difficultés, les méthodes de comparaison stochastique ont été introduites pour qu'on puisse avoir des estimations qualitatives de ces mesures en les bornant (en les majorant ou en les minorant) par des mesures de performance d'autres modèles plus simples.

L'objectif de ce travail est l'étude des conditions de comparabilité pour certaines mesures de performance d'un tel système, en utilisant la théorie générale des ordres stochastiques.

Mots-clés : Files d'attente avec rappels, Chaîne de Markov induite, Monotonie, Ordre stochastique.

15.1 Introduction

Beaucoup de situations de file d'attente ont la particularité que les clients qui arrivent et trouvent la zone de service occupé doivent le quitter temporairement et se joindre à un groupe de clients insatisfaits, mais ils répètent leur demandes après un certain temps aléatoire. Entre les essais de client est dit être en orbite. Ces modèles de files d'attente avec rappels se posent dans la modélisation stochastique de nombreux protocoles de communication, des réseaux locaux et des situations de la vie quotidienne.

Dans la plupart des publications sur les files d'attente avec rappels, le serveur ne fournit le service qu'aux arrivées entrantes effectuées par les clients réguliers. Cependant, il existe des situations réelles (par exemple, un centre d'appels) où un opérateur non seulement sert les appels entrants, mais il effectue aussi des appels sortants vers l'extérieur lorsque le serveur est libre. Cette fonction est connue sous le nom de files d'attente à communication bidirectionnelle.

La complexité de l'étude de la majorité des systèmes d'attente avec rappels a contraint les analystes à recourir à des méthodes d'approximation basées sur les inégalités stochastiques pour avoir des estimations qualitatives des caractéristiques du modèle étudié. Cela a motivé l'élaboration de la théorie des ordres stochastiques qui permet l'étude du concept de monotonie des processus aléatoires. L'objectif de ces méthodes est l'approximation du modèle étudié par un modèle plus simple ou bien par un modèle dont les distributions sont plus simples que celles du modèle étudié.

Dans ce travail, nous utilisons la méthode de comparaison stochastique pour étudier les propriétés de monotonie du modèle d'attente $M_1, M_2/G_1, G_2/1$ avec rappels à communication bidirectionnelle par rapport aux ordres stochastique et convexe en s'inspirant du travail de Boualem et al. (2009) [3]. L'intérêt de notre approche provient du fait que nous pouvons arriver à un compromis entre le rôle de ces bornes qualitatives et la complexité de la résolution de certains systèmes complexes où certains paramètres ne sont pas parfaitement connus (c'est-à-dire, au lieu d'étudier ses mesures de performance d'une manière quantitative, cette approche tente de révéler la relation entre les mesures de performance et les paramètres du système). Particulièrement, nous avons prouvé la monotonie de l'opérateur de transition de la chaîne de Markov incluse, du modèle considéré, relativement aux ordres stochastique et convexe et nous avons dérivé des conditions de comparabilité des opérateurs de transition de la chaîne de Markov incluse.

Le reste du document est organisé comme suit : la deuxième section est consacrée à la description mathématique du modèle. Dans la troisième section, on énonce trois lemmes qui vont permettre la comparaison des probabilités du nombre de clients arrivant durant une période de service. Les conditions de monotonie et de comparabilité de l'opérateur de transition associé à la chaîne de Markov incluse sont données dans la quatrième section.

15.2 Description mathématique du modèle

Nous considérons un système de file d'attente à un seul serveur auquel les clients primaires entrants arrivent selon un processus de Poisson de taux λ. En outre, si le serveur est libre, alors il génére un appel sortant dans un temps exponentiellement distribué avec un taux α. Nous supposons que les appels entrants et les appels sortants reçoivent des temps de service différents. $B_1(x)$ $(B_1(x) = 0)$ représente la distribution du temps de service d'un appel entrant, alors que $B_2(x)$ $(B_2(x) = 0)$ désigne la distribution du temps de service d'un appel sortant. Un appel entrant qui trouve le serveur occupé rejoint l'orbite et il retente d'entrer dans la zone de service selon une distribution exponentielle avec un taux μ, si $N(t) = j$, alors le taux de rappel est $j\mu$. Également désigner la transformée de Laplace-Stieltjes et le $k^{\text{ième}}$ moment de $B_l(x)$ comme $\beta_l(s)$ et β_l^k (resp), Pour $l = 1, 2$ et

$k \in \mathbf{Z}_+$, où $\mathbf{Z}_+ = \{0, 1, 2...\}$. L'arrivée des flux d'appels entrants et sortants, temps de service et les inter-rappels sont supposés être mutuellement indépendants.

L'état du système à l'instant t peut être décrit par le processus $Y(t) = (C(t), N(t), \xi(t))$ $\grave{o}u$:

$$C(t) = \begin{cases} 0, \text{si le serveur est inactif à l'instant t ;} \\ 1, \text{si le serveur est occupé par un appel entrant à l'instant t ;} \\ 2, \text{si le serveur lance un appel vers l'exterieur à l'instant t.} \end{cases}$$

Et, $N(t)$ représente le nombre de clients en orbite à l'instant t.

15.2.1 Chaîne de Markov induite :

Soit η_n l'instant de la fin de service du $n^{\text{ième}}$ client. La suite $Z_n = N(\eta_n+)$ forme une chaîne de Markov qui est une chaîne de Markov incluse pour notre système de files d'attente dont l'espace est $S = \{1, 2\} \times \mathbf{Z}_+$. On remarque que $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ vérifie l'équation d'état :

$$Z_n = Z_{n-1} - W_n + V_n; \tag{15.1}$$

où V_n est le nombre d'arrivées entrantes pendant le service du $n^{\text{ième}}$ client, sa distribution est donnée par :

$$k_j^l = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^j}{j!} dB_l(x), \quad l = 1, 2, \quad j \in \mathbf{Z}_+, \tag{15.2}$$

et,

$$W_n = \begin{cases} 1, \text{si le } n^{\text{ième}} \text{ client en service provient de l'orbite,} \\ 0, \text{sinon.} \end{cases}$$

La matrice de transition $P = (p_{ij})$ a une structure de la matrice d'une $M/G/1$ avec les éléments :

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{i\mu}{\lambda+\alpha+i\mu} k_0^1, & \text{si } i \geq 1, j = i-1, \\ \\ \frac{\lambda}{\lambda+\alpha+i\mu} k_{j-i}^1 + \frac{\alpha}{\lambda+\alpha+i\mu} k_{j-i}^2 + \frac{i\mu}{\lambda+\alpha+i\mu} k_{j-i+1}^1, & \text{si } 0 \leq i \leq j. \end{cases} \tag{15.3}$$

Avec,

$$k_j^l = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^j}{j!} dB_l(x), \quad l = 1, 2, \quad j \in \mathbf{Z}_+.$$

15.3 Résultats préliminaires

Soient X et Y deux variables aléatoires non négatives de fonctions de répartition F et G, respectivement. On dit que X est inférieure à Y par rapport à :

– Ordre stochastique (noté $X \leq_{st} Y$) ssi : $F(x) \geq G(x), \quad \forall x \geq 0$.

– Ordre convexe (noté $X \leq_v Y$) ssi : $\int_x^{+\infty} \overline{F}(u)d(u) \leq \int_x^{+\infty} \overline{G}(u)d(u), \quad \forall x \geq 0$.

– $F \leq_L G$, si pour tout s positif on a l'inégalité suivante :

$$E(\exp(-sX)) = \int_0^{+\infty} \exp(-sX)dF(x) \geq \int_0^{+\infty} \exp(-sX)dG(x) = E(\exp(-sY)).$$

Dans le cas où X et Y sont des variables aléatoires discrètes prenant des valeurs sur l'ensemble des entiers relatifs $\mathbf{Z}$, et en notant par $P_i^{(1)} = P\{X = i\}$ et $P_i^{(2)} = P\{Y = i\}$ pour $i \in \mathbf{Z}$, alors

$X \leq_{st} Y \Leftrightarrow \sum_{j=-\infty}^{i} P_j^{(1)} \geq \sum_{j=-\infty}^{i} P_j^{(2)}, \quad i \in \mathbf{Z}$,

$X \leq_v Y \Leftrightarrow \sum_{i=k}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty} P_j^{(1)} \leq \sum_{i=k}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty} P_j^{(2)}$.

Maintenant on compare, les probabilités du nombre de clients arrivant durant le service d'un appel sortant de deux systèmes d'attente $M_1, M_2/G_1, G_2/1$ avec rappels à communication bidirectionnelle $\{k_n^{(i)}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad i = 1, 2\}$, suivant les ordres partiels : stochastique, convexe et en transformée de Laplace.

Soient Σ_1 et Σ_2 deux modèles d'attente $M_1, M_2/G_1, G_2/1$ avec rappels à communication bidirectionnelle de paramètres (respectivement, pour $i = 1, 2$) :

$\lambda^{(i)}$: Taux d'arrivées entrantes dans Σ_i.

$\mu^{(i)}$: Taux de rappels dans Σ_i.

α^i : Taux d'appels sortants dans Σ_i.

$B_1^{(i)}(x)$: Distribution des temps de service des appels entrants dans Σ_i.

$B_2^{(i)}(x)$: Distribution des temps de service des appels sortants dans Σ_i.

$k_n^{(i)}$: Probabilité qu'il y ait j arrivées entrantes pendant un temps de service dans Σ_i.

$\pi_n^{(i)}$: Distribution stationnaire du nombre de clients dans le système Σ_i.

Les trois lemmes suivants donnent les conditions, sur les paramètres des deux systèmes, sous lesquelles ces probabilités sont comparables aux sens des ordres cités ci-dessus.

Lemme 15.1 *Soient Σ_1 et Σ_2 deux systèmes d'attente $M_1, M_2/G_1, G_2/1$ avec rappels à communication bidirectionnelle :*

1. *si $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$ et $B_2^{(1)} \leq_{st} B_2^{(2)}$ alors $\{k_n^{(1)}\} \leq_{st} \{k_n^{(2)}\}$,*

2. *si $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$ et $B_2^{(1)} \leq_v B_2^{(2)}$ alors $\{k_n^{(1)}\} \leq_v \{k_n^{(2)}\}$,*
   où : $k_n^{(i)} = P(X = n) = \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda^{(i)}t)^n}{n!} e^{-\lambda^{(i)}t} dB_2^{(i)}(t)$, $i = 1, 2$.

Démonstration.

1. Supposons que $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$ et $B_2^{(1)} \leq_{st} B_2^{(2)}$.
   Par définition de l'ordre stochastique $\leq_{st}$, on a pour une loi discrète, les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\{k_n^{(1)}\} \leq_{st} \{k_n^{(2)}\} \Leftrightarrow \bar{k}_n^{(1)} = \sum_{m=n}^{+\infty} k_m^{(1)} \leq \sum_{m=n}^{+\infty} k_m^{(2)} = \bar{k}_n^{(2)};\\
\Leftrightarrow \sum_{m=n}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda^{(1)}x)^m}{m!} \exp\{-\lambda^{(1)}x\} dB_2^{(1)}(x);\\
= \int_0^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(1)}x)^m}{m!} \exp\{-\lambda^{(1)}x\} dB_2^{(1)}(x);\\
\leq \int_0^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(2)}x)^m}{m!} \exp\{-\lambda^{(2)}x\} dB_2^{(2)}(x).
\end{aligned} \tag{15.4}$$

   Pour prouver l'inégalité numérique (15.4), on considère la fonction

$$g_n(x, \lambda) = \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{(\lambda x)^m}{m!} \exp\{-\lambda x\};$$

   qui est une fonction croissante par rapport à x et λ.
   En effet, en vertu du théorème 1.2.2 donné dans [5] et la monotonie de $g(x, \lambda)$ par rapport à λ on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} g_n(x,\ \lambda^{(1)}) dB_2^{(1)}(x) &\leq \int_0^{+\infty} g_n(x,\ \lambda^{(1)}) dB_2^{(2)}(x);\\
&\leq \int_0^{+\infty} g_n(x,\ \lambda^{(2)}) dB_2^{(2)}(x).
\end{aligned}$$

2. Par définition de l'ordre convexe $\leq_v$ on a :

$$\{k_n^{(1)}\} \leq_v \{k_n^{(2)}\} \Leftrightarrow \bar{\bar{k}}_n^{(1)} = \sum_{m=n}^{+\infty} \bar{k}_m^{(1)} \leq \sum_{m=n}^{+\infty} \bar{k}_m^{(2)} = \bar{\bar{k}}_n^{(2)};$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} \sum_{l=m}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(1)}x)^l}{l!} \exp\{-\lambda^{(1)}x\} dB_2^{(1)}(x) \leq$$

$$\leq \int_0^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} \sum_{l=m}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(2)}x)^l}{l!} \exp\{-\lambda^{(2)}x\} dB_2^{(2)}(x);$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} g_m(x,\ \lambda^{(1)}) dB_2^{(1)}(x) \leq$$

$$\leq \int_0^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} g_m(x,\ \lambda^{(2)}) dB_2^{(2)}(x); \tag{15.5}$$

avec,

$$g_m(x,\ \lambda^{(i)}) = \sum_{l=m}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(i)}x)^l}{l!} \exp\{-\lambda^{(i)}x\};$$

qui est une fonction croissante et convexe par rapport à x et croissante par rapport à λ, d'où

D'après le théorème 1.3.1 donné dans [5] et la monotonie de $g(x, \lambda)$ par rapport à λ l'inégalité (15.5) est vérifiée.

Lemme 15.2 *Soient Σ_1 et Σ_2 deux systèmes d'attente $M_1, M_2/G_1, G_2/1$ avec rappels à communication bidirectionnelle, si $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$ et $B_2^{(1)} \leq_L B_2^{(2)}$ alors $\{k_n^{(1)}\} \leq_L \{k_n^{(2)}\}$.*

Démonstration. Par définition, on a :

$$k^{(i)}(z) = \sum_{n\geq 0} k_n^{(i)} z^n = \beta_2^{(i)}(\lambda^{(i)}(1-z)), i = 1, 2.$$

Pour prouver que l'inégalité $\{k_n^{(1)}\} \leq_L \{k_n^{(2)}\}$ a lieu, il suffit d'établir l'inégalité suivante :

$$\beta_2^{(1)}(\lambda^{(1)}(1-z)) \geq \beta_2^{(2)}(\lambda^{(2)}(1-z)),$$

c'est-à-dire montrer l'équivalence suivante :

$$\{k_n^{(1)}\} \leq_L \{k_n^{(2)}\} \Leftrightarrow \beta_2^{(1)}(\lambda^{(1)}(1-z)) \geq \beta_2^{(2)}(\lambda^{(2)}(1-z)). \tag{15.6}$$

De plus,

$$B_2^{(1)} \leq_L B_2^{(2)} \Rightarrow \beta_2^{(1)}(s) \leq \beta_2^{(2)}(s), \quad \forall s \geq 0.$$

En particulier pour $s = \lambda^{(1)}(1-z)$, on a :

$$\beta_2^{(1)}(\lambda^{(1)}(1-z)) \geq \beta_2^{(1)}(\lambda^{(1)}(1-z)). \tag{15.7}$$

Puisque toute transformée de Laplace est une fonction décroissante, l'inégalité $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$ implique l'inégalité suivante :

$$\beta_2^{(2)}(\lambda^{(1)}(1-z)) \geq \beta_2^{(2)}(\lambda^{(2)}(1-z)). \tag{15.8}$$

Par conséquent, l'inégalité (15.6) découle des inégalités (15.7) et (15.8).

15.4 Monotonie de la chaîne de Markov incluse

Les probabilités de transition en un pas de la chaîne de Markov incluse pour le système $M_1, M_2/G_1, G_2/1$ avec rappels à communication bidirectionnelle sont données par la formule suivante :

$$p_{n,m} = \begin{cases} \frac{n\mu}{\lambda+\alpha+n\mu} k_0^1, & \text{si } n \geq 1, m = n-1, \\ \\ \frac{\lambda}{\lambda+\alpha+n\mu} k_{m-n}^1 + \frac{\alpha}{\lambda+\alpha+n\mu} k_{m-n}^2 + \frac{n\mu}{\lambda+\alpha+n\mu} k_{m-n+1}^1, & \text{si } 0 \leq n \leq m. \end{cases} \tag{15.9}$$

Soit τ l'opérateur de transition associé à la chaine de Markov incluse. Pour chaque distribution $p = (p_n)_{n\geq 0}$, on associe une distribution $\tau_p = q = (q_m)_{m\geq 0}$ telle que

$$q_m = \sum_{n\geq 0} p_n p_{n\ m}.$$

Le théorème suivant donne la condition sous laquelle l'opérateur de transition τ est monotone par rapport aux ordres stochastique et convexe.

Théorème 15.1 *Si l'inégalité $B_2 \leq_{st} B_1$ a lieu, alors l'opérateur de transition τ est monotone, par rapport à l'ordre stochastique. C'est-à-dire, pour deux distributions quelconques $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$, l'inégalité $p^{(1)} \leq_{st} p^{(2)}$ implique la suivante : $\tau p^{(1)} \leq_{st} \tau p^{(2)}$.*

Démonstration. Un opérateur est monotone par rapport à l'ordre stochastique si et seulement si on a l'inégalité suivante :

$$\bar{p}_{n-1\ m} \leq \bar{p}_{n\ m}, \ \forall\ n,\ m; \tag{15.10}$$

avec,

$$\bar{p}_{n\ m} = \frac{\lambda+n\mu}{\lambda+\alpha+n\mu} \overline{k}_{m-n+1}^1 + \frac{\lambda}{\lambda+\alpha+n\mu} k_{m-n}^1 + \frac{\alpha}{\lambda+\alpha+n\mu} \overline{k}_{m-n}^2;$$

et,

$$\bar{p}_{n-1\ m} = \frac{\lambda+(n-1)\mu}{\lambda+\alpha+(n-1)\mu}\overline{k}^1_{m-n+1} - \frac{(n-1)\mu}{\lambda+\alpha+(n-1)\mu}k^1_{m-n+1} + \frac{\alpha}{\lambda+\alpha+(n-1)\mu}\overline{k}^2_{m-n+1};$$

d'où :

$$\begin{aligned}\bar{p}_{n\ m} - \bar{p}_{n-1\ m} = {} & \frac{\alpha\mu}{(\lambda+\alpha+n\mu)(\lambda+\alpha+(n-1)\mu)}[\overline{k}^1_{m-n+1} - \overline{k}^2_{m-n+1}] + \frac{\lambda}{\lambda+\alpha+n\mu}k^1_{m-n} + \\ & + \frac{(n-1)\mu}{\lambda+\alpha+(n-1)\mu}k^1_{m-n+1} + \frac{\alpha}{\lambda+\alpha+n\mu}k^2_{m-n} \geq 0.\end{aligned}$$

Par conséquent, puisqu'on a l'inégalité $B_2 \leq_s tB_1$, alors l'inégalité (15.10) est vérifiée. En conclusion l'opérateur τ est monotone par rapport à l'ordre stochastique.

Théorème 15.2 *Si l'inégalité $B_1 \equiv_v B_2$ a lieu, alors l'opérateur de transition τ est monotone, par rapport à l'ordre convexe. C'est-à-dire, pour deux distributions quelconques $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$, l'inégalité $p^{(1)} \leq_v p^{(2)}$ implique la suivante : $\tau p^{(1)} \leq_v \tau p^{(2)}$.*

Démonstration. L'opérateur τ est monotone par rapport à l'ordre convexe si et seulement si :

$$2\bar{\bar{p}}_{n\ m} \leq \bar{\bar{p}}_{n-1\ m} + \bar{\bar{p}}_{n+1\ m}, \quad \forall\ n, \quad m, \tag{15.11}$$

Pour prouver cette inégalité on note :

$$D = \bar{\bar{p}}_{n-1,m} + \bar{\bar{p}}_{n+1,m} - 2\bar{\bar{p}}_{n,m};$$

et on montre que $D \geq 0$. On a :

$$\begin{aligned}D = {} & \frac{2\alpha\mu^2}{(\lambda+\alpha+(n+1)\mu)(\lambda+\alpha+n\mu)(\lambda+\alpha+(n-1)\mu)}\left[\bar{\bar{k}}^2_{m-n+1} - \bar{\bar{k}}^1_{m-n+1}\right] + \\ & + \frac{2\alpha\mu^2}{(\lambda+\alpha+(n+1)\mu)(\lambda+\alpha+n\mu)(\lambda+\alpha+(n-1)\mu)}\left[\bar{k}^2_{m-n} - \bar{k}^1_{m-n}\right] + \\ & + \frac{2\alpha\mu(\lambda+\alpha+n\mu)}{(\lambda+\alpha+(n+1)\mu)(\lambda+\alpha+(n-1)\mu)(\lambda+\alpha+n\mu)}\left[\bar{k}^1_{m-n} - \bar{k}^2_{m-n}\right] + \\ & + \frac{2\mu^2(\lambda+\alpha)}{(\lambda+\alpha+(n+1)\mu)(\lambda+\alpha+n\mu)}\bar{k}^1_{m-n} + \frac{(n-1)\mu}{\lambda+\alpha+(n-1)\mu}k^1_{m-n} + \\ & + \frac{\lambda}{\lambda+\alpha+(n+1)\mu}k^1_{m-n-1} + \frac{\alpha}{\lambda+\alpha+(n+1)\mu}k^2_{m-n-1} \geq 0\end{aligned}$$

D'où, comme $B_1 \equiv_v B_2$, alors l'inégalité (15.11) est vérifiée. Alors, l'opérateur τ est monotone par rapport à l'ordre convexe.

15.5 Conclusion

Les méthodes de comparaison stochastique nous permettent de comparer des systèmes complexes avec des systèmes plus simples à analyser, ce qui conduit à l'obtention des bornes (inférieure et supérieure) pour les caractéristiques de ces systèmes.

Dans ce travail, on a établi des conditions de comparabilité sur les paramètres d'un système de files d'attente $M_1, M_2/G_1, G_2/1$ avec rappels à communication bidirectionnelle, qui assurent la monotonie de l'opérateur de transition associé à la chaîne de Markov incluse.

Références

1. J. R. Artalejo and A. Gómez-Corral. *Retrial queueing system : A computation approach.* Springer Edition, Berlin, 2008.
2. J. R. Artalejo and T. Phung-Duc *Single server retrial queues with two way communication. Applied Mathematical Modelling* , 37 : 1811–1822, 2013.
3. M. Boualem, N. Djellab and D. Aïssani. Stochastic inequalities for $M/G/1$ retrial queues with vacations and constant retrial policy. *Mathematical and Computer Modelling*, 50 : (1-2), 207–212, 2009.
4. M. Shaked and J. G. Shanthikumar. *Stochastic Orders.* Springer-Verlag, New York, 2007.
5. D. Stoyan. *Comparison methods for queues and other stochastic models.* Wiley, New York, 1983.