Séminaire Mathématique de Béjaïa (LaMOS)
Volume 12, 2013, pp. 103 - 105

12

L'approche variationnelle du principe du maximum stochastique

A. REDJIL[a], B. MEZERDI[b]

[a]Université d'Annaba, [b]Université de Biskra
[a] email : amel_redjil@yahoo.fr

Résumé The present paper deals with a stochastic optimal control. This involves in particular modeling the evolution of the price of a financial asset. For this, we have established the necessary conditions for optimality of a control by disturbing it. We have as result an estimate of the solutions of the stochastic differential equation which governs the system.

Key words : Principe du maximum stochastique, approche variationnelle, hamiltonien, principe, stochastique de pontryagin.

12.1 Introduction

Le principe du maximum examine la minimisation d'un Hamiltonien sur U, l'espace des contrôles admissibles. L'objectif du principe stochastique de Pontryagin est d'établir les conditions nécessaires d'optimalité vérifiées par un contrôle après avoir assuré son existence.

12.2 Présentation du travail

On se place dans $\left(\Omega, F, (F_t)_{t\in\mathbb{R}^+}, P\right)$ un espace probabilisé muni d'une filtration satisfaisant les conditions habituelles, $B=(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un mouvement brownien $d-$dimensionnel et A un borelien de $\mathbb{R}^k$.
-On considère un processus $u=(u_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ mesurable et $(F_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$-adapté à valeurs dans un borelien A dans $\mathbb{R}^k$ avec $u_t=\alpha$. L'évolution est modélisée selon l'équation :

$$\begin{cases} dX_t = b\left(t, X_t, u_t\right) dt + \sigma\left(t, X_t\right) dB_t, t \in \left]0, T\right]; \\ X_0 = x, x \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \tag{12.1}$$

On suppose ce qui suit :

- $b\left(t,x,\alpha\right)$ est continue en α et uniformément continue en t et en x.
- $b\left(t,x,\alpha\right)$ et $\sigma\left(t,x\right)$ sont dérivables en x et à dérivés continues et bornées et vérifient les conditions suivantes :

i- il existe une constante positive K, indépendante de (t, α) telle que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^m : |b(t,x,\alpha) - b(t,y,\alpha)|^2 + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)|^2 \leq K|x-y|^2.$$

ii- il existe une constante positive C indépendante de t et α telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^m : |b(t,x,\alpha)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \leq C\left(1 + |x|^2\right).$$

On définit la fonction coût par : $J(u) = E\left[\int_0^T l(t, X_t, u_t)\, dt + g(X_T)\right]$, où g et l sont des fonctions réelles telles que $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, l : [0,T] \times \mathbb{R}^m \times A \to \mathbb{R}$.
On note par X_T la solution de l'EDS contrôlée (12.1), prise à l'instant terminal T et de plus, X_T est associée à un contrôle admissible u pour lequel on définit le coût $J(u)$.
Le contrôle $u^*(x)$ est dit optimal si pour tout $x \in \mathbb{R}^m$, on a :

$$\mathcal{V}(x) := \inf_{u \in \mathcal{U}} \{J^u(x)\} = J^{u^*}(x).$$

12.3 Résultats

Soit $u\hat{}$ un contrôle optimal. Il existe un processus $(p_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ tel que $\forall t \in [0,T]$,pour tout contrôle admissible u, on a la condition nécessaire suivante :

$$H(p_t, X_t^{u\hat{}}, u\hat{}) \leq H(p_t, X_t^{u\hat{}}, u).$$

On perturbe le contrôle $\widehat{u}$ à l'aide du contrôle $\widehat{u}^\theta$ défini comme suit :

$$\widehat{u}^\theta = \begin{cases} \widehat{u}_t & \text{si } t \in [0, \tau[\,; \\ v & \text{si } t \in [\tau, \tau+\theta[\,; \\ \widehat{u}_t & \text{si } t \in [\tau+\theta, T]. \end{cases}$$

Notre objectif est l'estimation des solutions $\widehat{X}$ et $\widehat{X}^\theta$comme suit :
Soient $\widehat{X}$ et $\widehat{X}^\theta$ les solutions fortes de (12.1) associées respectivement à $\widehat{u}$ et $\widehat{u}^\theta$, on a l'estimation suivante :

$$E\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|\widehat{X}_t^\theta - \widehat{X_t}\right|^2\right] \leq M.\theta^2, \tag{12.2}$$

et on aura :

$$\lim_{\theta \to 0} E\left[\sup_{t\in[0,T]} \left|\widehat{X}_t^\theta - \widehat{X_t}\right|^2\right] = 0. \tag{12.3}$$

On a la condition nécessaire suivante :

$$\frac{dJ}{d\theta}\left(\widehat{u}^\theta\right)|_{\theta=0} \geq 0.$$

12.4 Conclusion

L'évolution du prix d'un actif est modélisée par l'EDS :

$$dX_t = r.X_t dt + \sigma X_t dB_t.$$

Le problème est de trouver un temps d'arrêt qui maximise la valeur espérée du bénéfice net : $\sup_\tau E\left[e^{-\varphi t}\right](X_t - a)$ et de calculer le profit espéré.

Références

1. B. Mezerdi, On some aspects of stochastic control problem. *Exposés séminaire IMATH*, Université du Sud Toulon, var, juillet 2009.
2. U. G. Haussmann, General necessary conditions for optimal control of stochastic systems, *Math.Programming.Studies 6, North Holland, Amsterdam*, pages 30-40, 1976.