

Evaluation des Performances des systèmes avec priorité relative et source(s) finie(s) via les RdPSG

S. HAKMI^a, O. LEKADIR^b et D. AÏSSANI^c

Unité de recherche LaMOS (Laboratoires de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes)

Université de Bejaïa, Bejaïa 06000, Algérie

Tél. (213) 34 21 51 88,

^aemail : sed.hakmi@gmail.com

^b email : ouizalekadir@gmail.com

^c email : lamos_bejaia@hotmail.com

Résumé Ce travail est consacré à la modélisation et à l'évaluation des performances des systèmes d'attente avec priorité relative et source(s) finie(s) via les Réseaux de Petri Stochastiques Généralisés (RdPSG). En effet, Le prolongement des RdPSG vers les processus de Markov accroît considérablement leur intérêt. Cela nous permet d'effectuer une analyse qualitative et quantitative de ces systèmes prioritaires. Par ailleurs, nous montrerons comment ce formalisme nous a permis de réduire la complexité de leurs analyses.

Mots clés : RdPSG, simulation, Priorité relative, Evaluation des performances.

10.1 Introduction

Les réseaux de Petri (RdP) constituent un outil mathématique et graphique de modélisation développé par Carl Adam Petri dans les années soixante [10]. Depuis, l'introduction de certains paramètres, caractéristiques et critères particuliers aux systèmes à étudier, a conduit à divers extensions des RdP classiques. Parmi ces extensions, on distingue le formalisme RdPSG introduit par Molloy [9]. Les RdPSG sont une extension des RdP stochastiques autorisant deux classes de transitions [2, 3] :

- Des transitions instantanées à temporisation nulle (transition immédiate) qui sont franchies immédiatement dès qu'elles sont sensibilisées.
- Des transitions temporisées ayant une durée de franchissement aléatoire.

Ce formalisme a été utilisé, en théorie de files d'attente, pour l'analyse de systèmes de files d'attente avec rappels [4, 5, 6, 7]. Notre objectif est d'adapter ce formalisme pour l'analyse des systèmes prioritaires à source(s) finie(s).

Dans certains systèmes de files d'attente (S.F.A) prioritaires, les clients proviennent d'au moins une population finie. L'analyse de ces systèmes est complexe, elle présente d'immenses difficultés algébriques dues à la dépendance des flots des arrivées des différentes classes de priorité (voir [1, 8]). Ainsi, leurs études dans la littérature se base essentiellement

sur des méthodes approximatives ou des méthodes algorithmiques.

Dans ce travail, nous avons modélisé et évalué les performances des systèmes $M_2/M_2/1//N$, $M_2/M_2/1//(N_1, N_2)$ et $M_3/M_3/1//(N_1, N_2, N_3)$ avec priorité relative, via le formalisme de RdPSG.

10.2 Modélisation du système $M_2/M_2/1//N$ via les RdPSG

On considère le système $M_2/M_2/1//N$ avec priorité relative, dans lequel arrivent deux classes de clients : clients non prioritaires et clients prioritaires, venant de la source de capacité N . Les deux types de clients arrivent indépendamment les uns des autres suivant un processus quasi-aléatoire avec un taux λ_1 et λ_2 respectivement. Le service des clients non prioritaires et prioritaires se fait suivant la loi exponentielle de paramètre μ_1 et μ_2 respectivement. La figure (Fig.10.1) représente une modélisation de ces systèmes par les RdPSG.

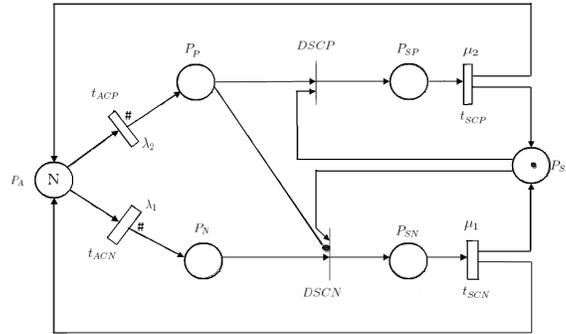


Figure 10.1. Le RdPSG modélisant les systèmes $M_2/M_2/1//N$ avec priorité relative.

Dans ce modèle on a :

- La place P_A contient les clients libres (source), représentés par N jetons. C'est-à-dire, aucun des N clients n'est arrivés dans le système ;
- La place P_N (resp. P_P) contient les clients non prioritaires (resp. les clients prioritaires) ;
- La place P_{SP} (resp. P_{SN}) représente l'état 'Le serveur est occupé par le client prioritaire' (resp. 'Le serveur est occupé par le client non prioritaire') ;
- La place P_{SL} représente l'état 'Le serveur est libre', représenté par un seul jeton.
- Le marquage initial du réseau est alors donné par :

$$M_o = (M(P_A), M(P_P), M(P_{SP}), M(P_N), M(P_{SN}), M(P_{SL})) = (N, 0, 0, 0, 0, 1).$$

Ceci, signifie que tous les clients sont initialement libres et que le serveur est disponible.

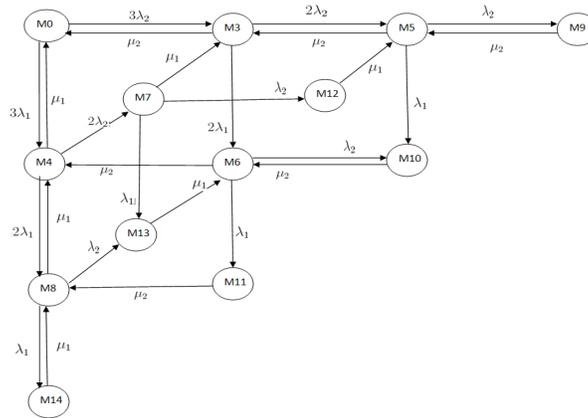


Figure 10.3. La CMT associée au RdPSG de $M_2/M_2/1//3$.

A partir de cette CMT, on a construit le générateur infinitésimal Q qui nous a donné la distribution stationnaire π . Ayant π , nous avons calculé plusieurs indices de performances voir les équations ((10.1)-(10.11)).

Nous avons analysé le système $M_2/M_2/1//N$ en variant les valeurs de N . Ainsi, nous avons pu obtenir le graphe de la CMT associée au RdPSG avec N quelconque d'une manière récursive (voir Figure Fig.10.4).

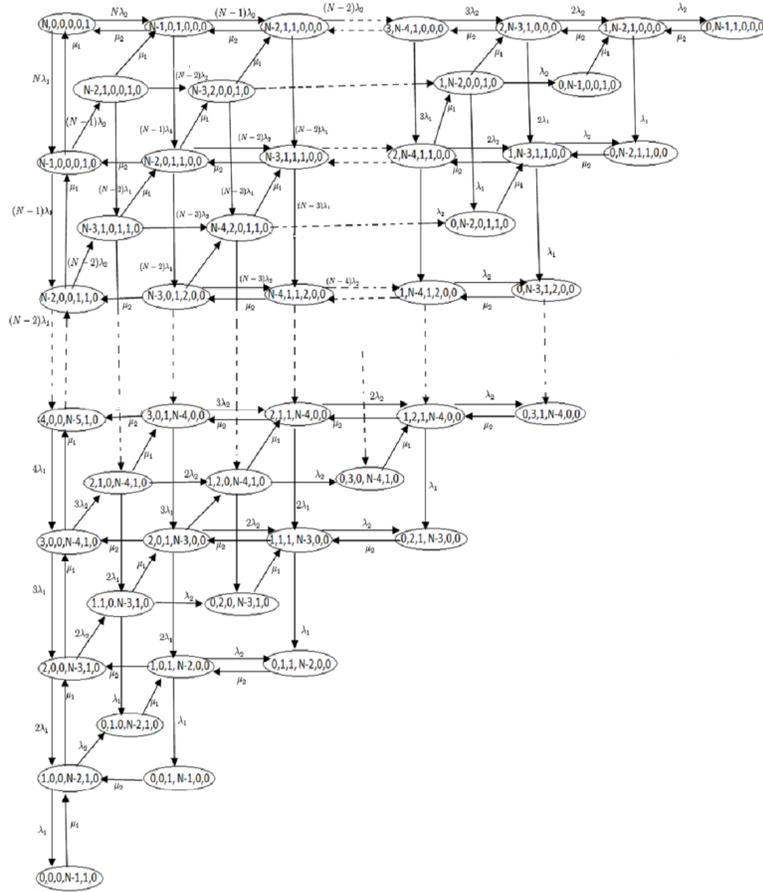


Figure 10.4. La CMTCC associée au RdPSG de $M_2/M_2/1//N$.

10.3 Modélisation de $M_2/M_2/1//N_1, N_2$ par les RdPSG

Dans ce modèle deux classes de clients arrivent de deux sources finies différentes : clients non prioritaires venant de la source P_A et les clients prioritaires venant de la source P_B . Pour ce modèle, la même étude que celle adoptée pour les systèmes $M_2/M_2/1//N$ a été faite. Ceci nous a conduit à l'analyse de leurs performances. La figure (Fig.10.5) représente une modélisation de ces systèmes par les RdPSG où la capacité de la population est représentée par les paramètres entiers positifs N_1 et N_2 qui apparaissent comme marquages initiaux des places P_A et P_B respectivement.

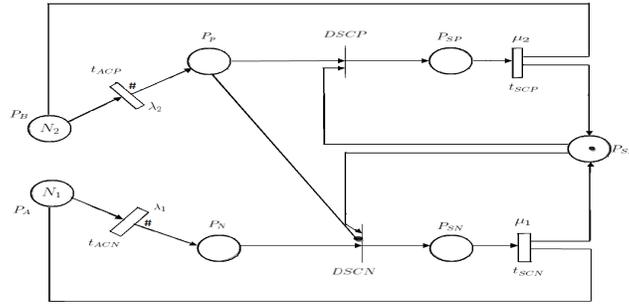


Figure 10.5. Le RdPSG modélisant les systèmes $M_2/M_2/1/(N_1, N_2)$ avec priorité relative.

10.3.1 Application sur le système $M_2/M_2/1/(2, 2)$

Comme exemple d'illustration, nous considérons une file d'attente $M_2/M_2/1/(2, 2)$ avec priorité relative et à deux sources finie de taille $N_1 = 2$ et $N_2 = 2$. Le marquage initial de ce réseau est donné par :

$$M_o = (M(P_B), M(P_p), M(P_{SP}), M(P_A), M(P_N), M(P_{SN}), M(P_{SL})) = (2, 0, 0, 2, 0, 0, 1).$$

Le graphe des marquages est donné dans la figure (Fig.10.6) suivante :

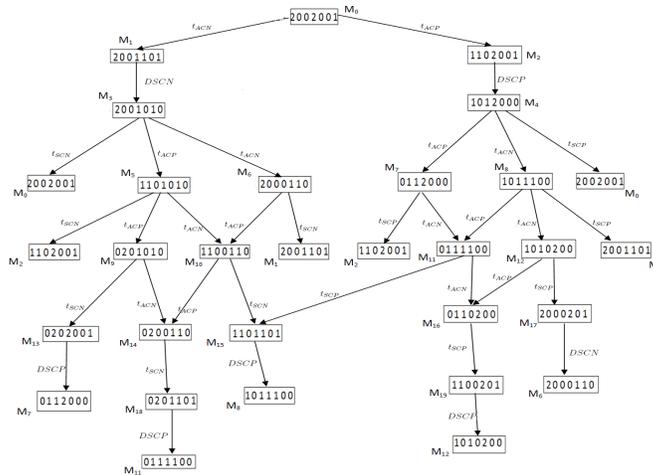


Figure 10.6. Graphe d'accessibilité associé à $M_2/M_2/1/(2, 2)$ avec priorité relative.

Nous avons construit la CMTC à partir de ce graphe des marquages. La figure suivante illustre cette CMTC associée au modèle RdPSG obtenu.

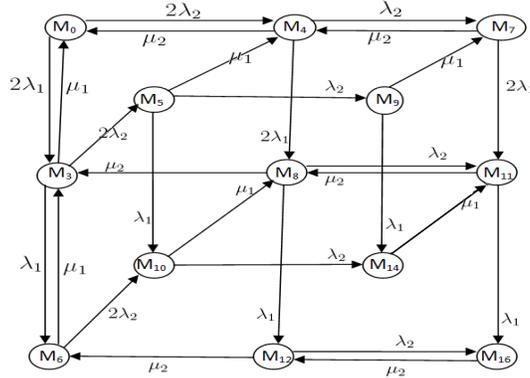


Figure 10.7. La Chaîne de Markov du réseau de Petri associé à $M_2/M_2/1/(2, 2)$ avec priorité relative.

Nous avons calculé le générateur infinitésimal Q à partir duquel on a pu calculer la distribution stationnaire π du système, ainsi que ses indices de performances, tels que :

- **Le taux moyen effectif des arrivées des clients non prioritaires η_N (resp.prioritaires η_P) :**

Ce taux est le nombre moyen de tir en une unité de temps :

$$\eta_N = \sum_{j \in SM_j} \lambda_1(M_j)\pi_j; \quad \eta_P = \sum_{j \in (SM_j)} \lambda_2(M_j)\pi_j; \quad (10.1)$$

où : (SM_j) est l'ensemble des marquages où la transition t_{ACN} (resp. t_{ACP}) est franchissable. $\lambda_1(M_j)$ (resp. $\lambda_2(M_j)$) est le taux de franchissement associé à la transition t_{ACN} (resp. t_{ACP})dans M_j .

- **Le nombre moyen de clients non prioritaires $M_j(P_N)$ (resp.prioritaires η_{0P}) dans la file :**

Ce nombre moyen est donné par la formule suivante :

$$\eta_{0N} = \sum_j M_j(P_N)\pi_j; \quad \eta_{0P} = \sum_j M_j(P_P)\pi_j; \quad (10.2)$$

où :

$M_j(P_N)$ (resp. $M_j(P_P)$) est le nombre de jetons dans la place P_N (resp. P_P) dans le marquage M_j . La somme dans cette formule se fait sur tous les marquages accessibles.

- **Le nombre moyen de clients non prioritaires η_{SN} (resp. prioritaires η_{SP}) dans le système :**

$$\eta_{SN} = \sum_j [M_j(P_N) + M_j(P_{SN})]\pi_j; \quad (10.3)$$

$$\eta_{SP} = \sum_j [M_j(P_P) + M_j(P_{SP})]\pi_j. \quad (10.4)$$

- **Le temps moyen d'attente des clients non prioritaires W_N (resp prioritaires W_P) :**

Le temps d'attente d'un client non prioritaires (resp prioritaires) est obtenu à l'aide de la formule de Little :

$$W_N = \frac{\eta_{0N}}{\eta_N}; \quad W_P = \frac{\eta_{0P}}{\eta_P}. \quad (10.5)$$

- **Le temps moyen de réponse des clients non prioritaires τ_N (resp. prioritaires τ_P) :**

$$\tau_N = \frac{\eta_{SN}}{\eta_N}; \quad \tau_P = \frac{\eta_{SP}}{\eta_P}. \quad (10.6)$$

Nous avons obtenu la CMTC associé au RdPSG avec N_1, N_2 quelconque d'une manière récursive (voir figure Fig.10.8 suivante).

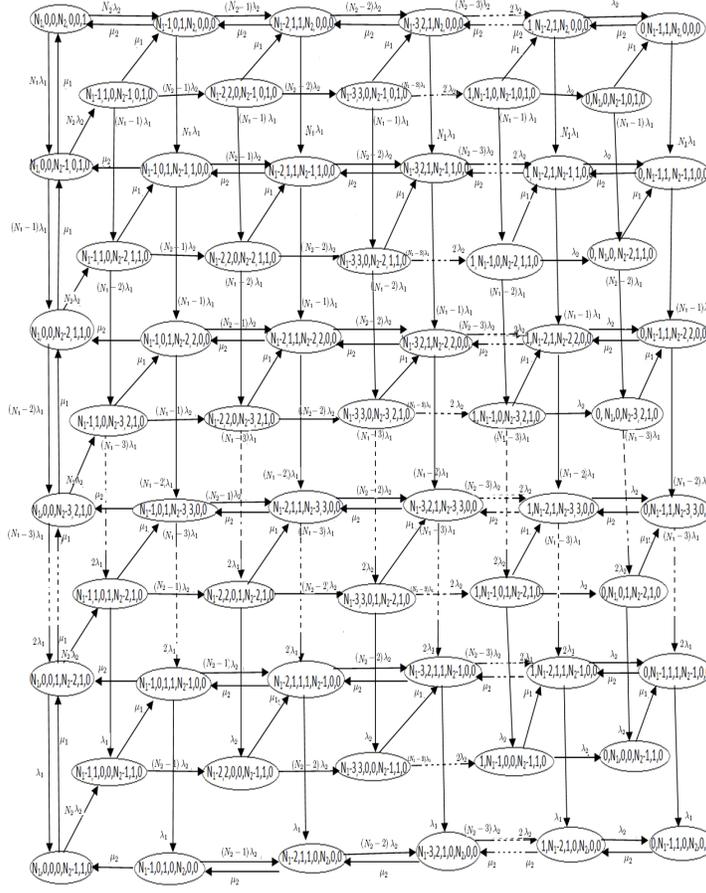


Figure 10.8. La CMTC associée à $M_2/M_2/1/(N_1, N_2)$.

10.4 Modélisation de $M_3/M_3/1/(N_1, N_2, N_3)$ par les RdPSG

Dans cette section, nous allons analyser un système de files d’attente à 3 classes de priorités $M_3/M_3/1/(N_1, N_2, N_3)$. Les clients de classe C_i sont prioritaires à ceux de la classe C_j si $j > i$. Ces trois types de clients arrivent indépendamment les uns des autres suivant un processus markovien avec un taux $\lambda_i, i = \overline{1, 3}$.

Le service des clients de classe $C_i, i = \overline{1, 3}$ se fait suivant la loi exponentielle de paramètre μ_i .

La figure (Fig.10.9) décrit le modèle *RdPSG* correspondant à ce système. La capacité des trois populations est représentée par les paramètres entiers positifs N_1, N_2 et N_3 qui apparaissent comme marquage initial des places P_A, P_B et P_C

- La place P_C est la source qui contient les clients prioritaires de classe 3, représentés par N_3 jetons ;
 - La place $P_{\bar{p}}$ contient les clients prioritaires de classe 3 ;
 - La place $P_{\overline{SP}}$ représente l'état 'Le serveur est occupé par le client prioritaire de classe 3.
- 3.
- Le marquage initial du réseau est :

$$\begin{aligned}
 M_o &= (M(P_C), M(P_{\bar{p}}), M(P_{\overline{SP}})M(P_B), M(P_{\bar{p}}), M(P_{SP}), M(P_A), M(P_N), M(P_{SN}), M(P_{SL})) \\
 &= (N_3, 0, 0, N_2, 0, 0, N_1, 0, 0, 1).
 \end{aligned}$$

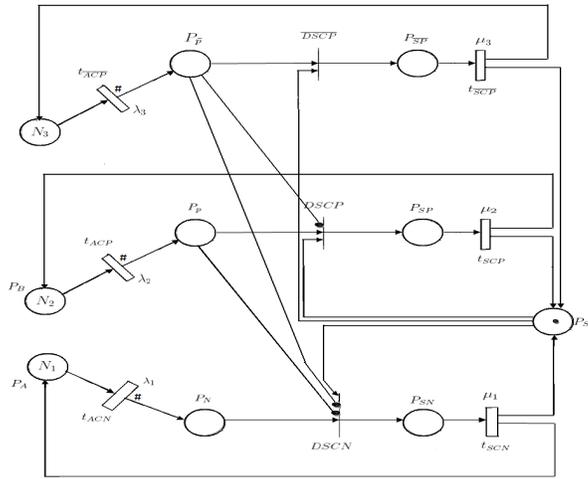


Figure 10.9. Le RdPSG modélisant le système $M_3/M_3/1/(N_1, N_2, N_3)$ avec priorité relative.

Après le calcul du générateur infinitésimal et de la distribution stationnaire, nous donnons dans ce qui suit juste les indices de performances ayant rapport avec les clients de la classe 3.

- **Le taux moyen effectif des arrivées des clients prioritaires de classe 3 :**

$$\eta_{\bar{p}} = \sum_{j \in (SM_j)} \lambda_3(M_j)\pi_j; \tag{10.7}$$

où :

- (SM_j) est l'ensemble des marquages où la transition $t_{\overline{ACP}}$ est franchissable.
 - $\lambda_3(M_j)$ est le taux de franchissement associé à la transition $t_{\overline{ACP}}$ dans M_j .
- **Le nombre moyen de clients prioritaires de classe 3 dans la file :**

$$\eta_{0\bar{p}} = \sum_j M_j(P_{\bar{p}})\pi_j; \tag{10.8}$$

où : $M_j(P_{\bar{p}})$ est le nombre de jetons dans la place $P_{\bar{p}}$ dans le marquage M_j et la somme concerne tous les marquages accessibles.

– **Le nombre moyen de clients prioritaires de classe 3 dans le système :**

$$\eta_{\bar{S}P} = \sum_j [M_j(P_{\bar{p}}) + M_j(P_{\bar{S}P})] \pi_j. \quad (10.9)$$

– **Le temps moyen d'attente des clients prioritaires de classe 3 :**

$$W_{\bar{P}} = \frac{\eta_{\bar{0}P}}{\eta_{\bar{p}}}. \quad (10.10)$$

– **Le temps moyen de réponse des clients prioritaires de classe 3 :**

$$\tau_{\bar{P}} = \frac{\eta_{\bar{S}P}}{\eta_{\bar{p}}}. \quad (10.11)$$

Pour prouver la performance de cette approche d'analyse des systèmes prioritaires avec source(s) finie(s) via les RdPSG, nous avons procédé à une comparaison des indices de performances obtenus par simulation et ceux obtenus via cette approche (voir section suivante).

10.5 Applications numériques

Dans cette section, nous présentons quelques résultats numériques obtenus en évaluant les principaux indices de performances des systèmes avec priorité relative et source(s) finie(s). En effet, nous avons comparé nos résultats obtenus par les RdPSG et ceux obtenus par Chandra et Sargent dans [14]. En outre, en faisant varier les différents paramètres λ_1 , λ_2 , λ_3 , μ_1 , μ_2 , μ_3 et pour différents nombres de clients dans les sources on a obtenu les caractéristiques :

t_{Q_i} : Le temps moyen d'attente d'un client de la classe i .

t_{N_i} : Le temps moyen de réponse d'un client de la classe i .

\bar{Q}_i : Le nombre moyen de clients de la classe i dans la file.

\bar{N}_i : Le nombre moyen de clients de la classe i dans le système.

$\rho(i)$: La proportion du temps d'occupation du serveur par un client de la classe i .

Application sur $M_2/M_2/1//(N_1, N_2)$

					RdPSG				
i	N_i	λ_i	μ_i		$\rho(i)$	t_{Q_i}	t_{N_i}	Q_i	N_i
1	25	0.06	1		0.07634	309.7897	310.7897	23.6512	23.7275
2	25	0.1	2		0.92365	3.0332	3.5332	5.6032	6.5269
1	10	1	10		0.12252	7.0617	7.1617	8.6522	8.7747
2	10	0.8	6		0.87689	0.4839	0.6506	2.5464	3.4233

Table 10.1. Résultats obtenus par les RdPSG pour le cas $M_2/M_2/1// (N_1, N_2)$.

					Analytiques				
i	N_i	λ_i	μ_i		$\rho(i)$	t_{Q_i}	t_{N_i}	Q_i	N_i
1	25	0.06	1		0.0763	309.7898	310.7898	23.6512	23.7275
2	25	0.1	2		0.9236	3.0332	3.5332	5.6032	6.5269
1	10	1	10		0.1225	7.0621	7.1621	8.6523	8.7748
2	10	0.8	6		0.8768	0.4840	0.6506	2.5464	3.4233

Table 10.2. Résultats obtenus par Chandra et Sargent pour le cas $M_2/M_2/1// (N_1, N_2)$.

Application sur $M_3/M_3/1// (N_1, N_2, N_3)$

					RdPSG				
i	N_i	λ_i	μ_i		$\rho(i)$	t_{Q_i}	t_{N_i}	Q_i	N_i
1	5	0.2	1		0.3773	7.2491	8.2491	2.7357	3.1130
2	2	0.4	5		0.0717	2.8779	3.0779	1.0319	1.1036
3	3	0.125	0.5		0.5166	1.6135	3.6135	0.4168	0.9334
1	2	0.4	5		0.0195	17.7502	17.9506	1.7359	1.7555
2	3	0.125	0.5		0.3347	7.9236	9.9245	1.3262	1.6609
3	5	0.2	1		0.6142	2.1394	3.1394	1.3142	1.9285
1	20	0.05	5		0.1829	1.6644	1.8644	1.5225	1.7054
2	4	0.3	2.5		0.3767	0.5138	0.9138	0.4839	0.8607
3	4	0.2	3		0.2365	0.3028	0.6362	0.2149	0.4515

Table 10.3. Résultats obtenus par les RdPSG pour le cas $M_3/M_3/1// (N_1, N_2, N_3)$.

					Analytiques				
i	N_i	λ_i	μ_i		$\rho(i)$	t_{Q_i}	t_{N_i}	Q_i	N_i
1	5	0.2	1		0.377	7.249	8.249	2.735	3.113
2	2	0.4	5		0.072	2.878	3.078	1.031	1.103
3	3	0.125	0.5		0.517	1.614	3.614	0.416	0.933
1	2	0.4	5		0.020	17.750	17.950	1.735	1.755
2	3	0.125	0.5		0.335	7.924	9.924	0.326	0.661
3	5	0.2	1		0.614	2.139	3.139	1.314	1.928
1	20	0.05	5		0.183	1.665	1.864	1.522	1.705
2	4	0.3	2.5		0.376	0.513	0.913	0.483	0.860
3	4	0.2	3		0.236	0.303	0.636	0.215	0.451

Table 10.4. Résultats obtenus par Chandra et Sargent pour le cas $M_3/M_3/1// (N_1, N_2, N_3)$.

D'après les tableaux **Tab.10.1**, **Tab.10.2**, **Tab.10.3** et **Tab.10.4**, nous remarquons que les résultats obtenus par les RdPSG sont très proches de ceux obtenus par Chandra et Sargent.

Application sur $M_2/M_2/1//N$

Les résultats affichés dans les tableaux **Tab.10.5** et **Tab.10.6** représentent les résultats obtenus par la simulation et ceux obtenus par les RdPSG pour les paramètres $N=50$, $\lambda_n=0.06$, $\lambda_p=0.1$, et $\mu_n=1$, $\mu_p=2$.

RdPSG				
i	t_{Q_i}	t_{N_i}	Q_i	N_i
1	71.0176	72.0176	38.7330	39.2784
2	1.2937	1.7937	1.1760	1.6305

Table 10.5. Résultats obtenus par les RdPSG pour le cas $M_2/M_2/1//N$.

Simulation				
i	t_{Q_i}	t_{N_i}	Q_i	N_i
1	71.0949	72.0958	38.7402	39.2856
2	1.2972	1.7976	1.1781	1.6326

Table 10.6. Résultats obtenus par la simulation pour le cas $M_2/M_2/1//N$.

D'après les tableaux **Tab.10.5** et **Tab.10.6**, il s'avère que les résultats obtenus par la simulation sont très proches de ceux obtenus par les RdPSG.

10.6 Conclusion

Notre axe de recherche a consisté à faire usage du formalisme RdPSG pour modéliser les systèmes prioritaires et d'évaluer leurs performances. La puissance d'expression de ce formalisme nous a permis une modélisation très détaillée et sémantiquement précise qui a réduit la complexité de ces systèmes prioritaires. Elle nous a offert, en plus d'une analyse qualitative, une analyse quantitative des indices de performances. En effet, l'isomorphisme existant entre les RdPSG et les processus markoviens, nous a permis d'exploiter les techniques de ces derniers pour le calcul des mesures de performances. Par ailleurs, nous avons effectué une étude comparative entre les résultats obtenus par l'approche RdPSG et ceux simulés. Cette comparaison a confirmé l'efficacité de notre approche.

Comme perspectives de recherche, nous suggérons de considérer les points suivants :

- Lorsque les systèmes étudiés contiennent plusieurs classes de clients, leurs représentations en RdPSG deviennent complexes donc difficilement exploitables [15, 16, 17]. Les RdPSG colorés constituent un modèle mathématique de haut-niveau, pouvant réduire la taille du modèle et dans lesquels chaque jeton correspondant à un client ou à un serveur doit porter une information qui dénote son type. Ainsi, il serait judicieux de les exploiter pour l’analyse des systèmes qu’on a étudiés quand le nombre de classes prioritaires est assez grand.
- Il serait intéressant d’élargir l’étude au cas non-borné $M_R/M_R/m//\infty$ (à population infinie). Dans ce cas, il y’a lieu de faire appel au graphe de couverture.
- Il sera pertinent d’introduire les rappels aux systèmes prioritaires précédents donc on aura affaire aux systèmes prioritaires avec rappels.
- Analyser les systèmes avec priorité absolue ayant plusieurs sources finies via (RdPSG).

Références

1. F. Bonson and D. R. Cox, The productivity of machines requiring attention at random intervals, *Journal of Royal Statistical Society*, 13(1) (1951), 65–82.
2. M. Diaz., *Petri nets, Fundamental models, verification and applications*, ISTE Ltd and John Wiley and Sons, Inc, 2009.
3. A. C. Geniet., *Les réseaux de Petri : Un outil de modélisation*, Springer-Verlag Berlin,2006.
4. N. Gharbi and M. Ioualalen, Performance evaluation of multi-server queues with station and server vacation, *Applied In International Industrial Simulation Conference ISC’04 Malaga, Spain*, (2004) 397–401.
5. N. Gharbi and M. Ioualalen, GSPN analysis of retrial systems with servers breakdowns and repairs. *Applied Mathematics and Computation*, 174(2) (2006) 1151–1168.
6. N. Gharbi, On the applicability of stochastic Petri nets for analysis of multiserver retrial systems with different vacation policies. Cha et al. (Eds.) : *ATVA 2008, LNCS 5311*, (2008) 289–302.
7. N. Gharbi and M. Ioualalen., Numerical investigation of finite-source multiserver systems with different vacation policies, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234(3) (2010), 625–635.
8. N. K. Jaiswal., *Priorty Queues*, Acadimic press new york and london, University of southern California, 1968.
9. M. K. Molloy., *On the integration of delay and throughput measures in processing models*, Ph.D.Thesis, University of California, Los Angeles, USA, 1981.
10. C. A. Petri., *Kommunikation mit automaten*, Phd dissertatio, Institut für Instrumentelle Mathematik, Univer-sity of Bonn, West Germany, 1962.
11. S. Hakmi, O. Lekadir et D. Aïssani, Analyse de Système Prioritaire à deux sources finies via les Réseaux de Petri Stochastiques Généralisés (RdPSG), communication à la huitième Rencontre d’Analyse Mathématique et ses applications, RAMA’8, 2012.
12. S. Hakmi, O. Lekadir and D. Aïssani , ”Performance analysis of a priority queueing system using generalized stochastic Petri nets”, article soumis pour publication au journal ”Applied mathematics and computation”, 2012.
13. S. Hakmi, O. Lekadir and D. Aïssani ”GSPN analysis of a multiple finite sources, non-preemptive priority queueing systems”, article soumis pour publication au journal ”Applied Mathematical Modelling”, 2013.
14. M. J. Chandra and R. G. Sargent, A Numerical Method to Obtain the Equilibrium Results for the Multiple Finite Sources Priority Queueing Model, *Infoms Management Science*,29(11), 1298–1308, 1983.
15. M. Ioualalen, M.C. Boukala and A. Aïssani, Les méthodes d’analyse hiérarchiques des Réseaux de Petri Stochastiques, 3ième Conférence Internationale sur l’Automatisme des Processus Hybrides, Reims,1998.

16. M. Ioualalen and M.C. Boukala, Les réductions dans les Réseaux de Petri Stochastiques, 4ième colloque sur la recherche en Informatique, CARI'98, Dakar,725-735, 1998.
17. M. Ioualalen and A. Aïssani, Symétries dans les Réseaux de Petri Stochastiques, Construction du graphe symbolique,RAIRO –VT,5-99, 1999.